

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE  
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
CORSO DI LAUREA IN FISICA

TESINA

## Il fondo cosmico nelle microonde

LAUREANDA  
Dunja Fabjan

RELATORE  
Prof. Marino Mezzetti

ANNO ACCADEMICO 2002 - 2003

# Indice

<b>1</b>	<b>Lo spettro</b>	<b>4</b>
1.1	L'origine del fondo cosmico . . . . .	4
1.1.1	Le predizioni e la scoperta . . . . .	4
1.2	L' universo primordiale . . . . .	5
1.3	La formazione dello spettro di corpo nero . . . . .	5
1.3.1	Lo spettro di corpo nero . . . . .	5
1.3.2	La termalizzazione . . . . .	6
1.3.3	Lo scattering Compton . . . . .	8
1.4	Le distorsioni nello spettro primordiale . . . . .	9
1.4.1	Annichilazione degli elettroni . . . . .	9
1.4.2	Distribuzione di corpo nero per i neutrini . . . . .	9
1.4.3	La nucleosintesi . . . . .	9
1.5	Le distorsioni successive dello spettro . . . . .	10
1.5.1	Distorsione di Bose-Einstein (o di potenziale chimico) . . . . .	11
1.5.2	Distorsione Compton . . . . .	11
1.5.3	Distorsione free-free o di Bremsstrahlung . . . . .	12
1.6	La ricombinazione . . . . .	13
1.6.1	La superficie di ultimo scattering . . . . .	14
1.7	L'evoluzione dello spettro dalla ricombinazione . . . . .	15
1.7.1	La ionizzazione . . . . .	15
1.7.2	Lo spettro attuale . . . . .	16
1.7.3	L'evoluzione della temperatura dopo la ricombinazione . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Le fluttuazioni</b>	<b>20</b>
2.1	Le scale angolari alla ricombinazione . . . . .	21
2.2	Le distorsioni primordiali intrinseche . . . . .	24
2.2.1	L'effetto di Sachs-Wolfe . . . . .	24
2.2.2	L'effetto Doppler . . . . .	25
2.2.3	Cancellazione dello spettro su piccole scale ( $\leq 5'$ ) . . . . .	26
2.3	Crescita delle strutture nell'universo . . . . .	27
<b>3</b>	<b>L'analisi delle fluttuazioni</b>	<b>31</b>
3.1	L'analisi delle fluttuazioni . . . . .	32
3.1.1	Lo spettro delle perturbazioni . . . . .	32

<i>INDICE</i>	2
3.1.2 Decomposizione in armoniche sferiche . . . . .	33
3.1.3 La funzione di correlazione angolare . . . . .	34
3.2 Lo spettro di potenza . . . . .	35
3.2.1 Lo spettro di potenza a scale angolari piccole . . . . .	36
3.2.2 Lo spettro di potenza a scale angolari grandi . . . . .	39
3.3 Le osservazioni . . . . .	42
3.3.1 I parametri cosmologici - ultimi dati . . . . .	44
<b>Bibliografia</b>	<b>46</b>

# Introduzione

Il fondo cosmico nelle microonde è la radiazione generata durante le prime fasi di vita dell'universo e che arriva a noi dall'epoca in cui l'universo aveva circa 300.000 anni. Lo spettro di questa radiazione è il più perfetto spettro di corpo nero che si conosca in natura.

La radiazione del fondo cosmico è importante perché fornisce l'evidenza osservativa della formazione dell'universo attraverso il Big Bang caldo. Dalle osservazioni si riescono inoltre a dedurre i processi principali che hanno portato ad uno spettro di corpo nero (e quindi i processi principali all'inizio dell'universo). Dalle misure che sono state effettuate da vari esperimenti, alcuni dei quali ancora attivi, altri in fase di completamento, si riuscirà a dare una stima migliore dei parametri cosmologici principali, che regolano l'evoluzione del nostro universo.

In questa esposizione ci soffermeremo sui processi nell'universo primordiale che hanno portato alla creazione della radiazione di fondo e successivamente sulle anisotropie che si osservano. Verranno considerati gli effetti che portano all'evoluzione delle anisotropie intrinseche. In questo ambito parleremo delle implicazioni che hanno le osservazioni del fondo cosmico raccolte fino ad adesso sulle teorie evolutive dell'universo.

# Capitolo 1

## *Lo spettro della radiazione di fondo cosmico*

### 1.1 L'origine del fondo cosmico

#### 1.1.1 Le predizioni e la scoperta

Il fondo cosmico nelle microonde (in inglese Cosmic Microwave Background o CMB) è la più vecchia radiazione che possiamo vedere e risale a circa 300.000 anni dopo il Big Bang.

Questo tipo di radiazione di fondo fu teorizzato da Gamow, Alpher e Herman nel 1946 (teoria ABG <sup>1</sup>). La loro teoria tentava di spiegare la creazione di elementi pesanti durante il Big Bang [3]. Come prodotto secondario della teoria predissero un fondo di radiazione di temperatura di circa 3 K.

La scoperta fu invece fatta quasi vent'anni dopo, nel 1965, da Arno A. Penzias e Robert W. Wilson, due ingegneri che lavoravano ai laboratori della compagnia Bell. Il loro scopo era di ridurre il rumore di un'antenna per esperimenti di comunicazione satellitare. Per far questo studiarono le emissioni della nostra galassia con un antenna ricevente nelle microonde. Cercando di ridurre il rumore notarono che era isotropo, non polarizzato e non dipendeva dalle stagioni (invariante nel periodo da luglio 1964 ad aprile 1965). Le loro misure portarono alla stima di un eccesso di temperatura di  $3.5 \pm 0.1 K$  [4]. Nello stesso periodo anche il gruppo guidato da Robert H. Dicke stava costruendo un'antenna per la ricerca del fondo cosmico e fu in grado quindi di fornire una spiegazione del fenomeno osservato dai due ingegneri [5]. Per questa scoperta nel 1978 Penzias e Wilson ricevettero il premio Nobel.

Bisogna inoltre precisare che il fondo cosmico era stato osservato già nel 1941 nelle righe di assorbimento del CN. <sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>R.A.Alpher, R.C.Herman, *Physics Today* (1988), vol. 41, No. 8, pag. 24

<sup>2</sup>Il perché verrà spiegato nell'ultimo paragrafo di questo capitolo che tratta l'evoluzione della temperatura dopo la ricombinazione (sezione 1.7.3 a pag. 17).

## 1.2 L' universo primordiale

La teoria dell'origine dell'universo attualmente accettata è la teoria del Big Bang, secondo la quale l'universo era inizialmente un luogo molto denso e caldo, del quale ancora non si conosce tutta la fisica. La sua origine, grazie a varie osservazioni (come ad esempio il turn-off point dalla sequenza principale di ammassi globulari), viene posta a circa 14 miliardi di anni fa.<sup>3</sup>

Il termine *universo primordiale* si usa per descrivere il periodo che precede la *ricombinazione*, cioè il momento in cui cominciò a formarsi idrogeno atomico. La materia nell'universo primordiale era ionizzata, mentre dopo l'epoca della ricombinazione l'universo contiene prevalentemente materia non ionizzata.

L'universo primordiale era, come già descritto, caldo e denso, e composto da un plasma di particelle. L'universo era neutro, poiché protoni ed elettroni erano presenti in ugual numero, e opaco, dato il corto cammino libero medio dei fotoni. Quindi non era trasparente alla radiazione fino alla ricombinazione, dalla quale ci proviene la più antica radiazione, i fotoni del fondo cosmico nelle microonde che stiamo studiando.

Nell'universo primordiale molti avvenimenti si sono succeduti a partire dall'epoca di Planck ( $\sim 10^{-43}$  s dal Big Bang), come ad esempio l'inflazione o la nucleosintesi primordiale.

Poiché radiazione e materia erano in equilibrio termodinamico, nelle prime fasi di vita dell'universo i fotoni formarono uno spettro di corpo nero la cui temperatura si adattava all'espansione cosmica ( $T_\gamma \sim 1/a$ ).<sup>4</sup>

## 1.3 La formazione dello spettro di corpo nero

Nell'universo primordiale, secondo la teoria del Big Bang caldo, i fotoni erano continuamente creati, assorbiti, riemessi; la materia e la radiazione erano in perfetto equilibrio, quindi l'universo si comportava da corpo nero perfetto. In questa sezione tratteremo i processi che portarono alla formazione di questo spettro. Prima però ci soffermeremo sul corpo nero e sul suo spettro.

### 1.3.1 Lo spettro di corpo nero

Il corpo nero è un corpo che assorbe tutta la radiazione incidente e il suo spettro dipende solamente dalla sua temperatura. Nel corpo nero la radiazione e la materia sono in equilibrio termodinamico. L'intensità specifica

---

<sup>3</sup>I dati del satellite WMAP forniscono una stima dell'età dell'universo di 13,7 miliardi di anni con un errore dell'1%.

<sup>4</sup>La temperatura dei fotoni evolve come l'inverso del fattore di scala  $a$ , che è il fattore di espansione dell'universo. L'evoluzione della temperatura è descritta in seguito nella formula 1.5 a pagina 18.

dello spettro di corpo nero (cioè l'energia emessa nell'unità di tempo perpendicolarmente all'unità di superficie per intervallo di frequenza e per unità di angolo solido) è data dalla formula di Planck

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

A basse frequenze  $\nu$  (o alte lunghezze d'onda  $\lambda$ ) vale l'approssimazione di Rayleigh-Jeans:

$$I(\nu, T) \approx \frac{2\nu^3}{c^2} kT,$$

mentre per alte frequenze  $\nu$  (o basse lunghezze d'onda  $\lambda$ ) vale la distribuzione di Wien:

$$I(\nu, T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}.$$

Sperimentalmente si osserva che vale la legge di Stefan - Boltzmann, dove la radianza del corpo nero  $e$  (cioè l'energia emessa in unità di tempo dall'unità di superficie) dipende dalla quarta potenza della temperatura:

$$e = \sigma T^4,$$

con  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$  la costante di Stefan - Boltzmann.

La posizione del massimo dello spettro della radiazione emessa dal corpo nero è determinata dalla legge dello spostamento di Wien:

$$\lambda_{max} T = \text{costante}.$$

La densità di energia  $u_\nu$  è legata alla  $I(\nu, T)$  dalla relazione

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} I(\nu, T).$$

### 1.3.2 La termalizzazione

La termalizzazione è la creazione di equilibrio termico tra materia e radiazione e porta alla formazione dello spettro di corpo nero. La termalizzazione può agire solamente tra regioni in contatto causale.

I due principali processi coinvolti nella formazione dello spettro di corpo nero sono:

$$e + p \rightarrow e + p + \gamma \quad (1.1)$$

e

$$e + \gamma \longleftrightarrow e + \gamma + \gamma. \quad (1.2)$$

Entrambi hanno la caratteristica cruciale di riuscire a creare (o distruggere) fotoni.

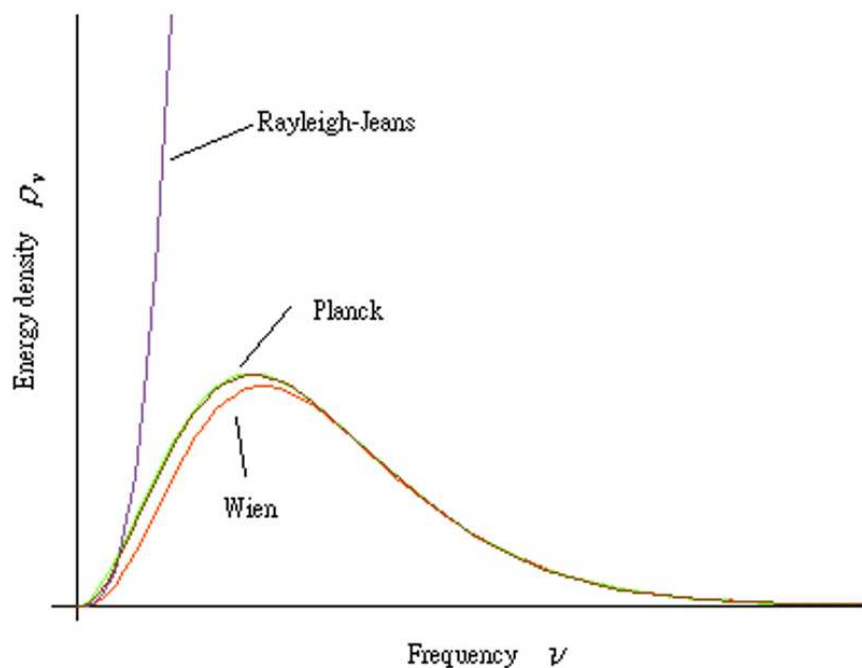


Figura 1.1: Lo spettro di corpo nero.

Nel grafico è rappresentata la densità di energia in dipendenza dalla frequenza  $\nu$  della radiazione a temperatura fissata  $T$  nei tre casi: legge di Planck, approssimazione di Rayleigh-Jeans e approssimazione di Wien.

Il primo processo avviene tra particelle libere (free-free). Processi di questo tipo vengono chiamati di *Bremsstrahlung*, come ad esempio l'assorbimento o emissione di fotoni in presenza di particelle cariche. Esso domina finché  $kT \sim 10 \text{ keV}$ .

Il secondo processo è il doppio scattering Compton e subentra al primo nel mantenere l'equilibrio termodinamico per  $kT < 10 \text{ keV}$ , fino all'inizio del periodo cosiddetto di Bose - Einstein a  $z_{BE} \approx 3 \cdot 10^6$  ( $k_B T \approx 1 \text{ keV}$ )<sup>5</sup>, quando l'età dell'universo è  $\sim 1$  anno.

L'efficacia dei processi diminuisce con il raffreddamento e la diluizione dell'universo. L'equilibrio termico viene mantenuto finché il tasso di collisione rimane maggiore di quello dell'espansione dell'universo.<sup>6</sup> Ecco perché i

<sup>5</sup> $z$  indica il redshift cosmologico, definito da  $(\lambda_{oss} - \lambda_{em})/\lambda_{em}$  dove l'indice  $_{oss}$  indica lunghezze d'onda osservate attualmente, mentre  $_{em}$  quelle emesse. Redshift alti corrispondono ad universo più giovane.

<sup>6</sup>Infatti scrivendo il tasso di collisione  $\Gamma$  come  $\Gamma = n\sigma v$ , dove  $n$  è il numero di centri diffusori per unità di volume,  $\sigma$  la sezione d'urto del processo e  $v$  la velocità delle particelle, l'equilibrio termico è mantenuto finché  $\Gamma/H > 1$ , dove  $H$  è il parametro di Hubble, che determina la velocità di espansione dell'universo. Il parametro di Hubble è espresso come



processi di formazione dello spettro di corpo nero sono efficaci solo prima di  $z_{BE}$ .

In conclusione nel periodo fino a  $z_{BE}$  materia e radiazione sono in equilibrio termodinamico e hanno una distribuzione di corpo nero con la stessa temperatura, che viene chiamata *temperatura dell'universo*. I due processi sono dominanti solamente in quest'epoca, anche se presenti pure in epoche successive.

### 1.3.3 Lo scattering Compton

Il periodo successivo, fino alla ricombinazione, è dominato dallo scattering Compton

$$e + \gamma \rightarrow e + \gamma,$$

che ha luogo tra fotoni ed elettroni liberi. In questo caso avviene tra loro uno scambio di energia, mentre il numero di fotoni si conserva. Si noti che la conservazione del numero di fotoni non permette la creazione o ri-creazione di uno spettro di corpo nero, nell'ipotesi in cui quest'ultimo sia stato (precedentemente) alterato. Lo scattering Compton tende ad uniformare la temperatura dei fotoni  $T_\gamma$  e quella degli elettroni  $T_e$ , ma in questo periodo le due sono già uguali, quindi questo processo non distrugge il preesistente spettro di corpo nero.

A ogni processo di scattering viene associata una sezione d'urto  $\sigma$ . L'efficienza dello scattering Compton dipende dalla sezione d'urto Thomson (per elettroni liberi) definita da

$$\sigma_T = \frac{8 \pi r_0^3}{3},$$

con  $r_0$  il raggio classico dell'elettrone. Il cammino libero medio dei fotoni è descritto da  $\lambda \approx 1/(\sigma_T n_e)$ , dove  $n_e$  indica la densità numerica degli elettroni. Per stimare l'efficienza del processo viene comparata la scala di tempo di diffusione dei fotoni  $t_T \approx 1/(c \sigma_T n_e)$  con il tempo di Hubble (il tempo di espansione  $1/H$  dato dall'inverso del parametro di Hubble, introdotto precedentemente) alla stessa epoca.

È tuttavia possibile che ci siano stati, dopo  $z_{BE}$ , dei rilasci di energia sotto forma di elettroni energetici o di fotoni energetici. In questo caso lo scattering Compton dopo  $z_{BE}$  avrebbe provocato delle distorsioni dello spettro di corpo nero delle quali parleremo nella successiva sezione.

Fenomeni di rilascio di energia (ad esempio il decadimento di particelle) prima di  $z_{BE}$  vengono resi irriconoscibili dall'efficienza dei processi descritti nel paragrafo 1.3.2 e l'eccesso di energia viene termalizzato.

---

$100 h km s^{-1} Mpc^{-1}$ ; la stima del suo valore attuale è  $72 \pm 8 km s^{-1} Mpc^{-1}$  con  $h = 0.72 \pm 0.08$ .

## 1.4 Le distorsioni nello spettro primordiale

Nell'universo primordiale, prima della ricombinazione, ci sono state varie trasformazioni di massa-energia che hanno indotto distorsioni nello spettro di corpo nero. Essendo però avvenute prima di  $z_{BE}$  sono state termalizzate. Vediamone alcuni esempi.

### 1.4.1 Annichilazione degli elettroni

Ad epoche attorno a  $z \approx 10^9 - 10^{10}$ , cioè a circa 4 secondi dal Big Bang è avvenuta l'annichilazione dei positroni ed elettroni a  $kT_e \approx 1 \text{ MeV}$ . Gli elettroni e positroni erano in precedenza relativistici e presenti in numero uguale ai fotoni. L'annichilazione ha portato alla creazione di nuovi fotoni, di energia  $1 \text{ MeV}$ . Questi fotoni sono stati termalizzati innalzando  $T_\gamma$  e anche la temperatura della materia, in equilibrio con  $T_\gamma$ .

Una delle difficoltà che l'annichilazione non riesce a spiegare è rappresentata dal *problema dell'antimateria*. Con l'annichilazione infatti non si riesce a spiegare la circa totale sparizione di positroni rispetto agli elettroni, che rimangono in numero  $10^9$  volte più basso del numero di fotoni.

Il processo di annichilazione ha aumentato l'energia della radiazione di un fattore  $(\frac{11}{4})^{\frac{4}{3}}$ . Inoltre anche tutti gli altri tipi di annichilazione tra particelle e antiparticelle (avvenuti ad energie maggiori) hanno portato ad un aumento di energia nello spettro di corpo nero.

### 1.4.2 Distribuzione di corpo nero per i neutrini

Di interesse puramente teorico (per ora) è il fondo cosmico dei neutrini. Prima dell'annichilazione tra positroni ed elettroni, anche i neutrini erano in equilibrio con la materia tramite l'interazione debole e alla stessa temperatura dei fotoni.

I neutrini non sono più stati in equilibrio con materia e radiazione da quando l'universo era a  $T \sim 10^{11} \text{ K}$  (a causa della rapida decrescita del numero di interazioni deboli) e hanno mantenuto la loro distribuzione caratterizzata oggi da una temperatura  $T_\nu = (\frac{4}{11})^{1/3} T_\gamma \approx 1,95 \text{ K}$ . A causa delle difficoltà nell'osservazione dei neutrini, il loro spettro non è stato ancora osservato.

### 1.4.3 La nucleosintesi

Un'altro aumento di energia è stato fornito ai fotoni nel periodo della nucleosintesi, a circa 3 minuti dalla creazione dell'universo, quando la temperatura era attorno a  $\sim 10^9 \text{ K}$ . In quel momento sono stati creati i nuclei degli elementi più leggeri, deuterio ed elio, formati da neutroni e protoni liberi, assieme a litio, berillio e boro.

La nucleosintesi ha liberato una frazione di energia stimata essere

$$\frac{\Delta E}{E} \approx 2 \cdot 10^{-7} \Omega h^2,$$

dove  $\Omega$  è il parametro di densità <sup>7</sup>. Anche quest'energia è stata termalizzata nello spettro di corpo nero e ne ha aumentato la temperatura.

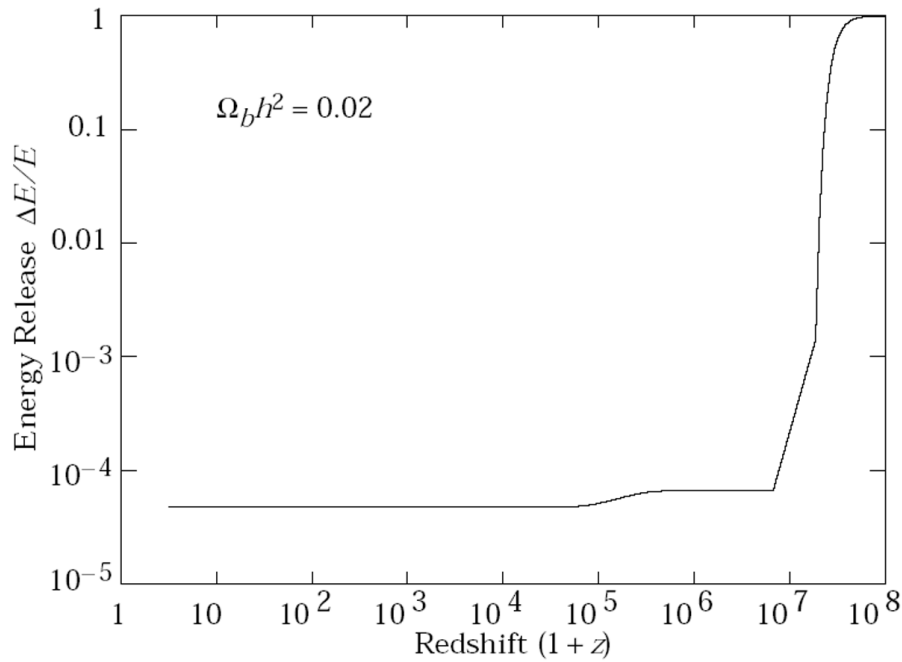


Figura 1.2: L'energia massima rilasciata in funzione di  $z$  in base alle osservazioni.

Nel grafico è rappresentato il limite massimo della frazione di energia  $\Delta E/E_{CMB}$  rilasciata a diverse epoche, come risulta dai dati sulle distorsioni nello spettro della radiazione di fondo cosmico (95% CL).

## 1.5 Le distorsioni successive dello spettro

Le possibili distorsioni successive nello spettro del fondo cosmico avvengono in due epoche dopo il primo anno di vita dell'universo. Ci soffermeremo su tre possibili distorsioni apportate dallo scattering Compton in epoche a  $z < z_{BE}$ : le distorsioni di Bose - Einstein, di Compton e di Bremsstrahlung.

<sup>7</sup>Il parametro di densità dell'universo somma le densità di materia barionica, materia oscura, costante cosmologica e neutrini. Dal valore di  $\Omega$  dipende la geometria dell'universo.

### 1.5.1 Distorsione di Bose-Einstein (o di potenziale chimico)

Abbiamo precedentemente accennato al periodo di Bose - Einstein come al periodo successivo alla formazione dello spettro di corpo nero. Le reazioni non riescono più a supportare l'equilibrio termodinamico. Comunque la distribuzione della radiazione rimane comunque di corpo nero, mentre a causa dell'espansione dell'universo la temperatura diminuisce.

Nel periodo da  $z_{BE} > z > z_y \approx 10^5$  il processo di scattering Compton riesce a mantenere almeno l'equilibrio statistico. Per la conservazione del numero di fotoni la loro distribuzione tende a quella di Bose - Einstein con potenziale chimico diverso da zero ( $\mu_0 \neq 0$ ) descritta dalla seguente formula

$$n(x) = \frac{1}{e^{x+\mu_0} - 1},$$

ove  $x \equiv \frac{h\nu}{kT}$  è la frequenza adimensionale e  $\mu_0$  il potenziale chimico adimensionale necessario per conservare il numero di fotoni. Quest'ultimo è stimato essere  $\simeq 1.4 \Delta E/E_{CMB}$  dove  $\Delta E/E_{CMB}$  è l'energia rilasciata.

### 1.5.2 Distorsione Compton

L'epoca di Bose - Einstein finisce a  $z_y$ <sup>8</sup>. Le interazioni nell'ultima parte dell'epoca dell'universo primordiale non riescono a sostenere uno spettro in equilibrio.

Nel caso ci siano molti elettroni a temperatura maggiore di quella dei fotoni, lo scattering Compton modifica lo spettro dei fotoni. Lo spettro può venir modificato in due modi: se lo scattering è efficiente i fotoni vengono portati in equilibrio statistico (ritorniamo al caso precedente, vedi par. 1.5.1), altrimenti lo spettro verrà distorto in modo caratteristico. Quest'ultimo processo prende il nome di *Comptonizzazione*.

L'effetto di 'Comptonizzazione', durante la quale i processi non sono abbastanza efficienti da portare all'equilibrio termico, dipende dal numero medio di elettroni per fotone. La Comptonizzazione depopola gli stati a bassa energia (la parte di Rayleigh - Jeans dello spettro) e ripopola gli stati a più alta energia (la parte di Wien dello spettro).

In questo caso si usano le equazioni di Kompaneets, dove, partendo da una distribuzione di equilibrio di corpo nero  $f_0$ , si scrive la perturbazione  $\delta f$  come:

$$\delta f = -2y\Psi(x) \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

ove  $\Psi(x) \equiv 2 - [x(e^x + 1)]/[2(e^x - 1)]$  e  $x \equiv h\nu/(kT_\gamma)$ .

<sup>8</sup>L'indice  $y$  indica l'epoca in cui avviene la distorsione Compton descritta dal parametro  $y$ .

La distorsione dello spettro viene poi calcolata tramite un parametro introdotto da Sunyaev e Zel'dovich

$$y = \int_0^z \frac{k(T_e(z') - T_\gamma(z'))}{m_e c^2} \frac{d\tau}{dz'} dz'$$

Con questo parametro si esprime la relativa differenza in energia tra fotoni ed elettroni durante uno scattering, moltiplicato per il numero medio di scattering (interazioni).  $d\tau$  è la profondità ottica definita da  $d\tau = n_e(z') \sigma_T c dt$ .

Quando la temperatura dei fotoni è più bassa di quella degli elettroni l'espressione si riduce a

$$y = \int_0^z \frac{k_B T_e(z')}{m_e c^2} \frac{d\tau}{dz'} dz'.$$

In questo caso l'integrale è proporzionale alla pressione degli elettroni  $n_e k T_e$  lungo la linea di vista.

Lo scattering Compton non può produrre uno spettro di Bose - Einstein per  $y \leq 1$  (il caso BE corrisponde a  $y \gg 1$ ). Nei modelli standard  $y < 1$  per epoche dopo  $z \simeq 10^5$  (cioè a redshift più basso).

La distorsione in temperatura è data da (nella regione di Rayleigh - Jeans)

$$\Delta T_{RJ} = -2y T_\gamma.$$

Infatti i fotoni sono shiftati dalle basse alle alte frequenze, cioè dalla parte dello spettro di Rayleigh-Jeans a quella di Wien.

L'energia rilasciata è legata alla distorsione  $y$ :

$$\frac{\Delta E}{E_{CBR}} = e^{4y} - 1 \simeq 4y.$$

### L'effetto Sunyaev - Zel'dovich (SZ)

Questo tipo di distorsione è tipico del mezzo intracluster caldo ( $T_e > 10^5 K$ )<sup>9</sup> presente negli ammassi di galassie e produce uno spettro parzialmente Comptonizzato. Questo effetto è noto come effetto Sunyaev - Zel'dovich. Dai dati nei raggi X si stima per grandi scale angolari che l'effetto totale combinato del mezzo intracluster caldo produca  $y \sim 10^{-6}$ . L'effetto SZ avviene però dopo la ricombinazione ( $z < 10^3$ ).

### 1.5.3 Distorsione free-free o di Bremsstrahlung

Distorsioni dello spettro di corpo nero possono anche essere prodotte a  $z \ll 10^3$  da un plasma tiepido, presente nell'universo ionizzato, attraverso

<sup>9</sup>Il mezzo intracluster caldo è un plasma diffuso e ad alta temperatura presente all'interno di un ammasso di galassie.

l'emissione free-free o di Bremsstrahlung. L'effetto sull'attuale spettro di corpo nero (indicato dal suffisso  $_{ff}$ ) viene descritto dalla relazione

$$\Delta T_{ff} = \frac{T_\gamma Y_{ff}}{x^2},$$

dove  $T_\gamma$  è la temperatura "non distorta" dei fotoni,  $x \equiv h\nu/(kT)$  la frequenza adimensionale,  $Y_{ff}/x^2$  la profondità ottica definita da

$$Y_{ff} = \int_0^z \frac{T_e(z') - T_\gamma(z')}{T_e(z')} \frac{8\pi e^6 h^2 n_e^2 g}{3m_e (kT_\gamma)^3 \sqrt{6\pi m_e kT_e}} \frac{dt}{dz'} dz'$$

con  $g$  fattore di Gaunt.

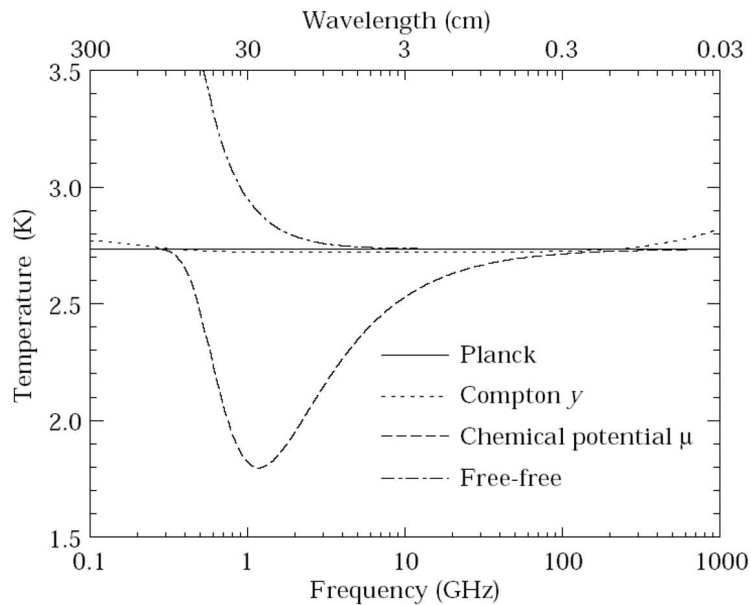


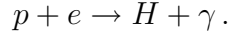
Figura 1.3: La possibile forma dello spettro delle distorsioni del fondo cosmico.

In figura sono rappresentate le possibili distorsioni (non ancora osservate) dello spettro della radiazione di fondo cosmico, causate da trasformazioni di massa-energia a diverse epoche.

## 1.6 La ricombinazione

Come già accennato, la ricombinazione è avvenuta circa 300.000 anni dopo il Big Bang ( $z \sim 1100$ ), quando la temperatura dell'universo era di circa 3000 K.

Il cammino libero medio dei fotoni prima della ricombinazione era talmente piccolo, che l'universo risultava opaco. Ecco perché non possiamo vedere alcun evento prima della ricombinazione. La *ricombinazione* è stata in realtà la prima combinazione di protoni ed elettroni in atomi di idrogeno:



In questo modo la radiazione si è disaccoppiata dalla materia e l'universo è diventato trasparente.

La ricombinazione è avvenuta quando l'universo era sufficientemente freddo. Sapendo che l'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno è di  $13.6 \text{ eV}$ , ci saremmo aspettati che la ricombinazione avvenisse all'equivalente temperatura di  $1.6 \cdot 10^5 \text{ K}$ , mentre alla ricombinazione la temperatura era di appena  $0.3 \text{ eV} \approx 3000 \text{ K}$ . L'universo aveva una grande entropia, perciò la cattura elettronica era solamente di poco più veloce della fotodissociazione. Inoltre, se l'elettrone è catturato direttamente nello stato fondamentale, emette un fotone che è ancora in grado di ionizzare altri atomi di idrogeno appena formati. Ecco perché la temperatura richiesta era tanto più bassa. Per questo la ricombinazione è stata un evento graduale, anche se veloce.

Secondo le teorie standard la ricombinazione è terminata quando la relativa ionizzazione dell'idrogeno era di  $10^{-2}$ , dove il grado di ionizzazione viene definito da

$$\alpha = \frac{n_e}{n_e + n_H}$$

e le densità degli elettroni e dell'idrogeno sono rappresentate con il suffisso  $e$  o  $H$ .

In accordo con i modelli, l'universo alla ricombinazione aveva un'età di  $t_{rec} \approx 5.6 \cdot 10^{12} (\Omega h^2)^{-1/2} \text{ s}$ , redshift 1100 e temperatura  $4000 \text{ K}$ .

### 1.6.1 La superficie di ultimo scattering

Parliamo ora della sorgente dei fotoni del fondo cosmico. Questi sono stati emessi tutti circa allo stesso tempo  $t_{rec}$  e fino ad oggi hanno percorso la distanza  $d_{rec}$ . Provengono da tutte le direzioni e la loro sorgente è la cosiddetta *superficie di ultimo scattering*.

In verità alcuni fotoni sono stati scatterati anche dopo la ricombinazione. Introduciamo ora la *trasparenza relativa*, che viene rappresentata dalla funzione di visibilità per lo scattering Thomson descritta da  $g(\tau) = e^{-\tau} (d\tau/dz)$ . Questa funzione misura la probabilità che un fotone sia scatterato nell'intervallo  $dz$  centrato su  $z$ . Nel nostro caso si suppone una distribuzione gaussiana centrata su  $z_{rec} \approx 1100$  con  $\Delta z \approx 80$  (ovvero lo spessore relativo  $\Delta z/z \approx 0.1$ ). L'evento della ricombinazione viene usualmente centrato sul massimo della funzione.

Sono comunque possibili anche reionizzazioni, che invece sposterebbero la sfera di ultimo scattering ad epoche più recenti.

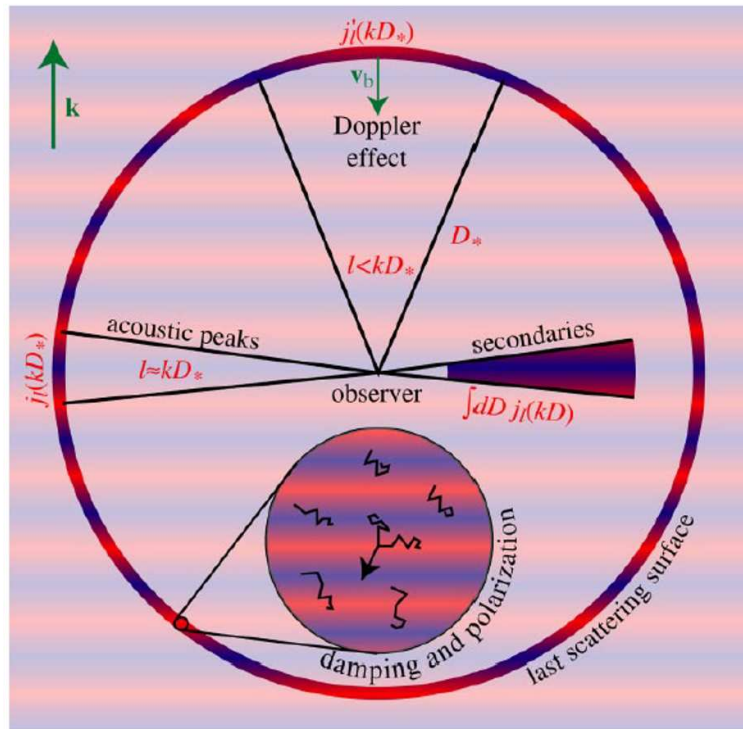


Figura 1.4: La superficie di ultimo scattering.

Nella figura è rappresentata la superficie di ultimo scattering e sono schematizzate le anisotropie primarie, come l'effetto Doppler, i picchi acustici (vedi capitolo 2) e le anisotropie secondarie e di polarizzazione. Le strisce rosse e blu sono la rappresentazione in onde piane della fluttuazione di temperatura.

## 1.7 L'evoluzione dello spettro dalla ricombinazione

### 1.7.1 La ionizzazione

Fino a  $z \approx 1000$ , cioè fino a quando si suppone che materia e radiazione siano in equilibrio, si usa l'equazione di Saha, che esprime il grado di ionizzazione. Alla ricombinazione le particelle sono non-relativistiche e obbediscono alla statistica di Boltzmann

$$n_i = g_i \left( \frac{2\pi m_i k_B T}{\hbar^3} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left( \frac{\mu_i - m_i c^2}{k_B T} \right),$$

che vale per protoni, elettroni e atomi neutri di idrogeno con  $g_i = g_e = g_H = 2$ .



Fino a  $z \approx 1100$  il tasso di ricombinazione dell'idrogeno è più grande del tasso di espansione dell'universo e viene descritto dall'equazione di Saha

$$\frac{n_e n_p}{n_H n_{tot}} = \frac{\alpha^2}{\alpha + 1} = \frac{\hbar^3}{n_{tot}} \left( \frac{m_e kT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{-B_H}{kT}\right).$$

Per tempi successivi i processi che controllano la ricombinazione non sono solamente la ricombinazione dell'idrogeno nello stato fondamentale, ma anche negli stati eccitati. Per il periodo  $900 < z < 1500$  una buona approssimazione viene fornita dalla relazione (Zel'dovich e Sunyaev)

$$\alpha = A(1 + z)^{-1} e^{-B/z}$$

con  $A = 6 \cdot 10^6 (\Omega h^2)^{-1/2}$  e  $B = B_H / (kT) = 1.459 \cdot 10^4$ .

La ionizzazione è diminuita dopo la ricombinazione in modo lento, governato da  $\Omega$  e  $\Omega_B$  (densità della materia barionica). Proprio a causa di questa ionizzazione le temperature della materia e della radiazione sono rimaste le stesse per molto tempo. Infatti, anche se  $z_{rec} \approx 1100$ ,  $z_{dec} \approx 6 (\Omega h^2)^{1/5} \alpha^{-2/5}$  (ove *dec* indica il disaccoppiamento (decoupling)).

Nei possibili scenari di evoluzione dell'universo vi è anche la possibilità che la successiva ionizzazione abbia potuto influire sulla superficie di ultimo scattering, spostandola a  $z < 1100$ .

## 1.7.2 Lo spettro attuale

Attualmente vediamo il fondo cosmico nelle microonde come uno spettro di corpo nero a temperatura di  $2.725 \pm 0.002 K$  con fluttuazioni angolari che sono dell'ordine di  $10^{-5}$  (a parte il dipolo cinematico). I fotoni che vediamo provengono dalla superficie di ultimo scattering, formatasi a  $z_{rec} \approx 1100$ , come precedentemente descritto. Poiché l'universo si espande, i fotoni ne risentono con lo spostamento verso il rosso.

Introduciamo ora alcuni parametri che risulteranno utili per la successiva esposizione.

Il fattore di scala  $a(t)$ , cioè la frazione di cui si è espanso l'universo da un tempo  $t$  al tempo attuale  $t_0$ , è definito da

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = \frac{r}{r_0}, \quad (1.3)$$

ove  $r$  è il raggio dato dalla legge di Hubble.<sup>10</sup> Poiché  $a(t)$  viene normalizzato a 1 per  $t_0$ , si ottiene

$$\frac{1}{a(t)} = 1 + z, \quad (1.4)$$

<sup>10</sup>La legge di Hubble descrive la velocità di espansione dell'universo ed è data da  $v = H r$  con  $H$  costante di Hubble.

dove  $z$  è il redshift cosmologico definito in precedenza. Inoltre dalla definizione di redshift la lunghezza d'onda osservata è

$$\frac{\lambda_{em}}{a(t)} = \frac{\lambda_{oss}}{a(t_0)} \quad \text{quindi} \quad \lambda_{oss} = \lambda_{em}(1+z)$$

e la frequenza osservata risulta

$$\nu_{oss} = \frac{\nu_{em}}{1+z}.$$

La frequenza dei fotoni emessi alla ricombinazione è diminuita di un fattore  $1+z$ , perciò il picco dello spettro viene osservato nelle microonde.

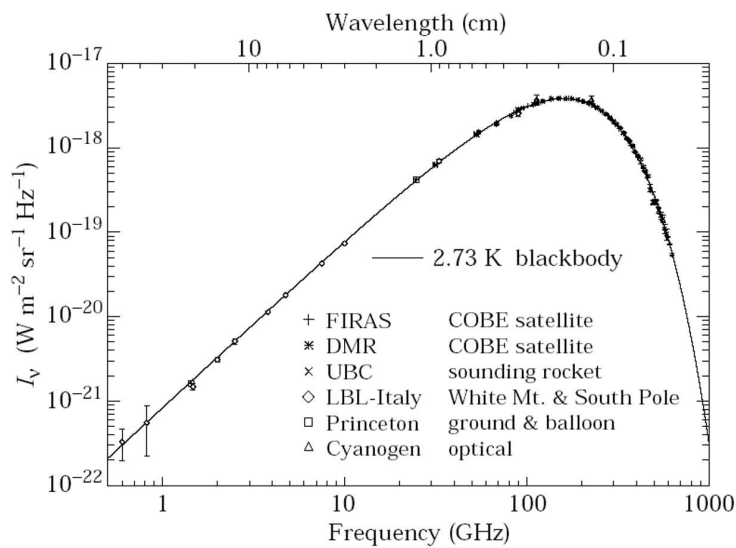


Figura 1.5: Lo spettro del fondo cosmico osservato.

I dati dei vari esperimenti sui satelliti sopra elencati riproducono in modo molto preciso la linea continua dello spettro teorico di un corpo nero a  $\sim 2.73 K$ .

### 1.7.3 L'evoluzione della temperatura dopo la ricombinazione

Per la successiva trattazione è importante capire come si sono evolute le temperature della materia e della radiazione dopo la ricombinazione.

**Temperatura della radiazione** Poiché il numero di fotoni contenuti in un elemento di volume che si espande come l'universo rimane invariato, lo spettro di corpo nero viene preservato. In accordo con la distribuzione di

Planck, il numero  $dN(t)$  di fotoni con frequenza tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  in un volume  $V(t)$  di spazio al tempo cosmico  $t_0$  è

$$dN(t_0) = \frac{8 \pi \nu_0^2 V(t_0) d\nu_0}{c^3 (e^{\frac{h\nu_0}{kT(t_0)}} - 1)}.$$

In un tempo successivo  $t'$

$$\nu' = \frac{\nu_0 a(t_0)}{a(t')} \quad \text{e} \quad V(t') = \frac{V(t_0) r^3}{r_0^3} = \frac{V(t_0) a^3(t')}{a^3(t_0)}.$$

Poiché il numero di fotoni rimane uguale,

$$\begin{aligned} dN(t') &= dN(t_0) \\ &= \frac{8 \pi \nu'^2 V(t') d\nu'}{c^3 (e^{h\nu'/kT(t')} - 1)} \\ &= \frac{8 \pi \nu_0^2 \left(\frac{a(t_0)}{a(t')}\right)^2 V(t_0) \left(\frac{a(t')}{a(t_0)}\right)^3 d\nu_0 \frac{a(t_0)}{a(t')}}{c^3 (e^{h\nu_0 a(t_0)/a(t') kT(t')} - 1)} \\ &= \frac{8 \pi \nu_0^2 V(t_0) d\nu_0}{c^3 (e^{h\nu_0/kT(t_0)} - 1)}, \end{aligned}$$

da cui  $T(t_0) = T(t') a(t')/a(t_0)$ . La temperatura scala quindi come  $a^{-1}$  o  $(1+z)$  e

$$T_\gamma = T_{oss}(1+z). \quad (1.5)$$

Vediamo quindi che, anche in assenza di interazioni che possono mantenere l'equilibrio termodinamico, la forma dello spettro di corpo nero rimane inalterata, ma con una temperatura che scala con  $1+z$ .

Questa decrescita è stata osservata nello spettro di oggetti ad alto redshift.<sup>11</sup> È interessante notare che già nel 1941 S.W. Adams e T.Jr. Dunham hanno rilevato righe di assorbimento interstellare delle molecole di  $CH$ ,  $CH^+$  e  $CN$  e che successivamente A. McKellar ha calcolato per la molecola di  $CN$  una temperatura di eccitazione di  $2.3 K$  [10].

---

<sup>11</sup>P. Molaro, S.A. Levshakov, M. Dessauges-Zavadsky, S. D'Odorico, *The cosmic microwave background radiation temperature at  $z=3.025$  toward QSO 0347-3819*, preprint: <<http://arXiv.org/astro-ph/0111589>>, 2001

**Temperatura della materia** Come già spiegato, la materia rimane legata alla radiazione almeno per un po' di tempo, fino a  $z \approx 200$ . La temperatura della materia da allora decresce come  $(1+z)^2$ . Possiamo descriverla come:

$$T_m = T_\gamma = T_0 (1+z) \quad z > 200$$

$$T_m = 2 \cdot 10^{-2} (1+z)^2 \quad z < 200,$$

dove la formula è valida nel caso non ci siano altri processi che interferiscono con l'espansione adiabatica e la materia deve poter essere considerata omogenea.

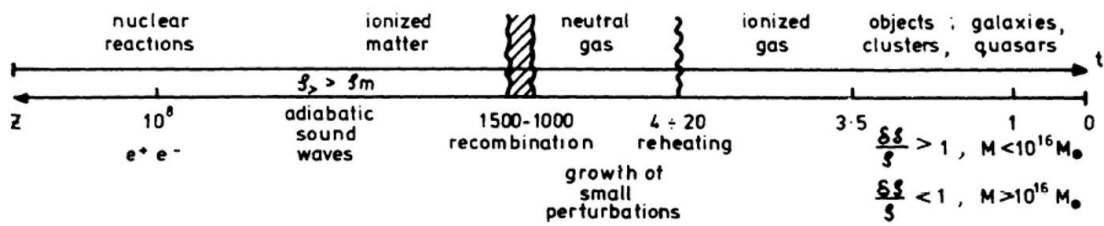


Figura 1.6: L'evoluzione dell'universo.

## Capitolo 2

### *Le fluttuazioni nella radiazione di fondo cosmico*

Dalle fluttuazioni in temperatura che osserviamo nello spettro del fondo cosmico nelle microonde ci viene fornita informazione sulla crescita delle strutture (galassie, ammassi, ...) che osserviamo in cielo.

Lo spettro del fondo cosmico è uno spettro di corpo nero quasi perfetto (le fluttuazioni angolari di temperatura, a parte il dipolo, sono dell'ordine di  $\Delta T/T \sim 10^{-5}$ ). Le anisotropie in temperatura sono strettamente legate alle fluttuazioni nella densità di materia.

Precedentemente abbiamo introdotto la superficie di ultimo scattering (pag.14). Da questa hanno origine i più antichi fotoni che osserviamo come fondo cosmico nelle microonde. L'emissione è isotropa, quindi la temperatura e la densità sono le stesse, indipendentemente dalla direzione in cui guardiamo il cielo.

Su questa superficie ci possono essere però delle distorsioni, dovute a vari fenomeni. Le fluttuazioni (o distorsioni) vengono suddivise a seconda dell'epoca in cui sono state create. Le fluttuazioni in densità (che sono collegate a fluttuazioni in temperatura) provocano delle distorsioni nello spettro dei fotoni.

Le *distorsioni primarie* o *intrinseche* hanno avuto luogo prima o durante la ricombinazione, essendo prodotte da tre effetti principali (l'effetto Sachs-Wolfe, l'effetto Doppler e la cancellazione dello spettro a piccole scale), che vedremo successivamente in dettaglio. Le *distorsioni secondarie* o *estrinseche* hanno agito sui fotoni del fondo cosmico dopo la ricombinazione.

Le fluttuazioni in densità inoltre possono essere puramente barioniche, di materia non barionica (calda, tiepida o fredda), adiabatiche o di isocurvatura. Solitamente sono trattate con statistica gaussiana, oppure in casi peculiari di difetti topologici con statistica non-gaussiana.

Le strutture che oggi osserviamo nel cielo si sono formate per instabi-

lità gravitazionale. Piccole differenze nella distribuzione di densità, presenti sulla superficie di ultimo scattering, sono cresciute fino a formare galassie, ammassi, superammassi... Ecco perché questo tipo di fluttuazioni fornisce informazioni utili sull'evoluzione delle strutture nell'universo, ma anche su parametri cosmologici e sulla composizione dell'universo, come vedremo in seguito.

## 2.1 Le scale angolari alla ricombinazione

Ogni anisotropia nello spettro del fondo cosmico può essere espressa dalla scala angolare. Dalla ricombinazione ad oggi le fluttuazioni sono cresciute a causa dell'espansione dell'universo e attualmente sottendono un'angolo diverso da quello alla ricombinazione. Anche per la trattazione nel successivo capitolo sarà utile descrivere il legame tra scale angolari e scale spaziali.

L'angolo sotteso da una perturbazione è descritto da

$$\theta = \frac{D}{d_A},$$

dove  $D$  è la dimensione lineare della perturbazione,  $d_A$  la distanza dal diametro angolare. Quest'ultima può essere scritta in termini di distanza di luminosità  $d_L$  dove

$$d_L = a_0 r (1 + z) \quad \text{e} \quad d_A = \frac{a_0 r}{1 + z} = \frac{d_L}{(1 + z)^2}.$$

In questo caso  $r$  è la coordinata comovente radiale ed è importante la sua dipendenza dal redshift  $z$ , dal parametro di Hubble  $H_0$  e dai parametri di densità  $\Omega_i$  (dove  $i$  è riferito ai diversi tipi di componenti dell'universo, materia barionica (M), radiazione (R), costante cosmologica ( $\Lambda$ )...). Questa dipendenza si può ricavare dalle equazioni di Friedman e dal legame tra il parametro di Hubble e il fattore di scala ( $H(t) = \dot{a}/a$ ). Anche la distanza di luminosità e la scala angolare della perturbazione dipenderanno dagli stessi parametri. L'angolo sotteso si può scrivere come

$$\theta = \frac{D(1 + z)^2}{d_L}$$

e per  $z \gg 1$  possiamo riscriverlo (nel caso più semplice in cui  $\Omega_\Lambda = 0$ ) come

$$\theta \simeq \frac{H_0 \Omega_M}{2c} D(1 + z)$$

dato che

$$d_L \simeq \frac{2cz}{H_0 \Omega_M}$$

(mentre in un universo piatto  $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$  e nelle due formule l'esponente di  $\Omega_M$  è 0.4, cioè  $\Omega_M^{0.4}$ ).

La dimensione di una perturbazione dipenderà dall'espansione dell'universo, quindi dal fattore di scala (o dal redshift  $z$ ). Usando l'equazione 1.4 è immediata la relazione

$$L(t) = \frac{L(t_0)}{1+z}.$$

Fissando il tempo attuale  $t_0$ ,  $L(t_0)$  rimane costante e  $L(t_{rec})$  aumenta con l'espansione. Se calcoliamo  $L(t)$  alla ricombinazione troviamo

$$D \equiv L(t_{rec}) = \frac{L(t_0)}{1+z_{rec}}.$$

L'espressione per la scala angolare della perturbazione diventa

$$\theta \simeq \frac{H_0 \Omega_M}{2c} L(t_0),$$

che può essere riscritta in termini di masse solari, dato che ad una perturbazione di dimensione  $L(t_0)$  possiamo associare una massa  $M(L) \simeq \frac{\pi}{6} \rho_0 L^3$ .

In questo modo troviamo l'espressione della corrispondenza tra *la scala angolare e la dimensione attuale*  $L = L(t_0)$ :

$$\theta \simeq L 1.67 \cdot 10^{-4} \frac{\Omega_M h}{Mpc} \simeq 34'' \frac{L h \Omega_M}{Mpc}.$$

Dalla relazione tra la massa  $M$  e la dimensione  $L$  troviamo

$$M(L) \simeq \frac{\pi}{6} \rho_0 L^3 = \frac{\pi}{6} \frac{3}{8 \pi G} \frac{\Omega_M h^2 (100)^2 km^2}{s^2 Mpc^2} L^3$$

con  $G$  costante di gravitazione, e può essere riscritta in masse solari  $M_\odot$

$$M = 1.4 \cdot 10^{11} M_\odot \Omega_M h^2 \frac{L^3}{Mpc}.$$

Da questa troviamo la corrispondenza tra *la scala angolare e la massa*  $M$  della perturbazione

$$\theta \simeq 11.5' \Omega_M^{\frac{2}{3}} h^{\frac{1}{3}} \left( \frac{M}{10^{15} M_\odot} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Al tempo attuale le galassie, gli ammassi e gli superammassi vengono visti sotto angoli  $\Theta_{galassie} < 1'$ ,  $\Theta_{ammassi} \sim 2'$  e  $\Theta_{superammassi} < 1^\circ$  rispettivamente.

Prima di proseguire nel calcolo della scala spaziale e angolare dell'orizzonte alla ricombinazione è utile definire ancora alcune quantità.

Dalla legge di Hubble

$$\mathbf{v}(t) = H(t) r(t) \quad \text{con} \quad H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

dove  $H(t)$  è il parametro di Hubble, si definisce il *raggio di Hubble*  $R_H(t)$  come la lunghezza propria che corrisponde alla velocità della luce

$$R_H(t) = \frac{c}{H(t)}.$$

La distanza propria massima, dalla quale provengono fino a noi i segnali luminosi, è detta *orizzonte delle particelle*  $d_H$

$$d_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{c dt'}{a(t')}$$

che dipende dall'evoluzione del fattore di scala ed è una quantità integrata. La  $d_H$  è propriamente un'orizzonte nel caso l'integrale abbia valore finito.

Nel modello di universo descritto da Einstein - de Sitter (che possiamo usare per la descrizione dell'universo nelle fasi iniziali) dominato da materia la relazione tra  $R_H(t)$  e  $d_H(t)$  è

$$R_H(t) = \frac{d_H(t)}{2}$$

mentre il parametro di Hubble e la densità sono descritti da

$$H(t) = \frac{2}{3t} \quad \text{e} \quad \rho_M(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (2.1)$$

Poiché il contributo della costante cosmologica (cioè di  $\Omega_\Lambda$ ) è trascurabile, il parametro di Hubble dipende dalla densità di materia come

$$H(z) = H_0 \Omega_M^{1/2} (1+z)^{3/2}.$$

Usando quest'equazione possiamo calcolare *l'orizzonte delle particelle alla ricombinazione*  $z_{ric} = 1100$

$$d_H \simeq 3ct = 3c \frac{2}{3H(z)} = \frac{2c}{H_0 \Omega_M^{1/2} (1+z)^{3/2}} = 0.165 (\Omega_M h^2)^{-1/2} \text{ Mpc}$$

che all'epoca attuale ( $t = t_0$ ) corrisponde a

$$D = d_H (1 + z_{ric}) \simeq 180 (\Omega_M h^2)^{-1/2} \text{ Mpc}.$$

Se consideriamo il raggio di Hubble  $R_H = d_H/2$  *la scala angolare* ad essa corrispondente *alla ricombinazione* risulta essere

$$\theta \simeq 34'' \Omega_M h 90 (\Omega_M h^2)^{-1/2} \simeq 1^\circ \Omega_M^{-1/2}.$$

Questo angolo fa da spartiacque tra quelle che sono considerate grandi e piccole scale angolari.



## 2.2 Le distorsioni primordiali intrinseche

Secondo i modelli di formazione galattica alla ricombinazione esistono già fluttuazioni di densità, che hanno poi portato alla formazione delle strutture cosmiche. Queste fluttuazioni danno origine alle distorsioni intrinseche del fondo cosmico, che sono descritte qui in seguito.

### 2.2.1 L'effetto di Sachs-Wolfe

L'effetto di Sachs-Wolfe è l'effetto dominante per fluttuazioni a larga scala ( $\leq 1^\circ$ ). Le fluttuazioni di densità creano un potenziale gravitazionale. La radiazione appena scatterata uscendo dalle buche di potenziale perde energia. I fotoni subiscono quindi un redshift gravitazionale.

Le fluttuazioni di temperatura e del potenziale gravitazionale sono correlate. In seguito viene descritta la derivazione della relazione tra le fluttuazioni in temperatura e il potenziale gravitazionale formulata da White e Hu (1997).<sup>1</sup>

La conservazione di energia implica che i fotoni, che escono da una buca di potenziale gravitazionale, perdono energia e che la fluttuazione di temperatura risultante è:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{oss} = \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{em} + \frac{\Phi_{em}}{c^2},$$

dove si vede che la fluttuazione nella temperatura dipende dalla fluttuazione intrinseca presente alla ricombinazione e dal potenziale gravitazionale. Gli indici  $_{oss}$  e  $_{em}$  si riferiscono rispettivamente al tempo attuale (al quale osserviamo) e al tempo di emissione (la ricombinazione).

Le buche di potenziale corrispondono a zone piú dense, che si sono espanse di meno rispetto all'universo omogeneo. Sono quindi rimaste piú indietro nell'espansione, sono piú calde e tendono a contrastare l'effetto di redshift gravitazionale.

Vediamo quale effetto prevale.

Poiché la temperatura  $T$  è proporzionale al fattore di scala  $a(z)$  (si veda pag. 18) dalle

$$T_{oss} = \frac{T(z)}{1+z} = T(z) a(z) = \text{cost.} \quad \text{e} \quad \Delta(a(z)T(z)) = 0$$

si ottiene che

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta a}{a}.$$

Dalle equazioni di Einstein per l'universo dominato da materia la dipendenza temporale del fattore di scala è di

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}} \quad \text{che implica} \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{2}{3} \frac{\delta t}{t}.$$

<sup>1</sup>M.White, W.Hu, The Sachs-Wolfe effect, *Astronomy and Astrophysics* 321, 8-9, (1997)

Il legame tra l'intervallo di tempo tra due "tic" dello stesso orologio in assenza di campo gravitazionale ( $d\tau$ ) ed in presenza di esso ( $dt$ ) è dato dalla

$$dt \sim \frac{1}{\sqrt{1 + 2(\Phi/c^2)}} d\tau \sim \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) d\tau.$$

Poiché  $\Phi_{em} < 0$  nella buca di potenziale,  $dt > d\tau$ : l'orologio va piú lento nel campo gravitazionale, cioè il tempo scorre piú lentamente del tempo cosmico e sarà  $t_{em} < t_{cosmico}$  con

$$t_{em} \sim t_{cosmico} \left(1 + \frac{\Phi_{em}}{c^2}\right) \quad \text{da cui} \quad \frac{\delta t}{t} \equiv \frac{t_{em} - t_{cosmico}}{t_{cosmico}} \sim \frac{\Phi_{em}}{c^2}.$$

La fluttuazione intrinseca di temperatura viene allora descritta da

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{em} = -\frac{\Delta a}{a} = -\frac{2}{3} \frac{\delta t}{t} = -\frac{2}{3} \frac{\Phi_{em}}{c^2}.$$

La formula generale, che descrive le fluttuazioni a larga scala, diventa quindi:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{oss} = -\frac{2}{3} \frac{\Phi_{em}}{c^2} + \frac{\Phi_{em}}{c^2} = \frac{1}{3} \frac{\Phi_{em}}{c^2}.$$

Nell'effetto di Sachs-Wolfe sono quindi presenti due effetti: il redshift gravitazionale che diminuisce la temperatura della regione densa, mentre l'addensamento di materia e radiazione aumenta la temperatura. Gli effetti si cancellano parzialmente, risultando in un raffreddamento nelle regioni sovradense.

### 2.2.2 L'effetto Doppler

La radiazione all'inizio della ricombinazione è ancora legata alla materia ed è perciò influenzata dalle fluttuazioni di densità. La materia viene attratta gravitazionalmente e tende ad addensarsi, mentre la radiazione viene scatterata. Essendo scatterata da una sorgente in movimento, a seconda della direzione della componente radiale della velocità della materia, la radiazione risulta spostata verso il rosso o verso il blu (effetto Doppler).

Per calcolare la distribuzione di materia in funzione della sua densità assumiamo che la fluttuazione di densità  $\delta$  dipenda linearmente dal tempo (questo vale prima della ricombinazione). La contrazione di queste fluttuazioni induce una perturbazione anche nella velocità  $\mathbf{v}$ , che possiamo calcolare dall'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{v}.$$

L'effetto Doppler sulla radiazione viene osservato come una fluttuazione in intensità per una data lunghezza d'onda oppure come una fluttuazione positiva o negativa nella temperatura dello spettro di corpo nero. La differenza in temperatura viene descritta da

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{Doppler} \approx \frac{\mathbf{v}}{c} \approx \delta \frac{L}{ct},$$

dove  $L$  è la dimensione propria della fluttuazione.<sup>2</sup>

In realtà questa relazione vale sulle scale grandi ( $\geq 1^\circ$ ), mentre su scale minori l'effetto Doppler è strettamente legato all'origine dei picchi acustici descritti nel paragrafo 3.2.1.

Vi è anche un effetto Doppler legato non all'epoca di emissione, ma all'epoca attuale: il cosiddetto *dipolo cinematico*. Questo è dovuto al moto del sistema solare e al moto del gruppo locale di galassie rispetto al fondo cosmico.<sup>3</sup> Il fondo cosmico rappresenta un sistema di riferimento (locale) migliore di quello di stelle distanti, galassie o quasar.

Successivamente introdurremo le oscillazioni acustiche del plasma di fotoni barioni, che contribuiscono al calcolo dell'effetto (Doppler e acustico) totale. I fotoni oscillano assieme ai barioni nelle buche di potenziale a causa della gravitazione che comprime il plasma e alla pressione dei fotoni, che tende a espanderlo. Queste oscillazioni presenti sulla superficie di ultimo scattering ci forniscono informazioni sulla geometria dell'universo.<sup>4</sup>

Tenendo conto anche del fatto che la ricombinazione non è istantanea le fluttuazioni nella temperatura dovrebbero essere descritte dalla seguente formula:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{c} \int_0^\infty \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{x}} e^{-\tau} \frac{dt'}{dz'},$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità della materia nel punto osservato,  $\hat{\mathbf{x}}$  il versore determinato dalla direzione di osservazione,  $\tau(z)$  la profondità ottica tra noi osservatori e la superficie a distanza (redshift)  $z$ .

### 2.2.3 Cancellazione dello spettro su piccole scale ( $\leq 5'$ )

Nel caso di fluttuazioni adiabatiche le regioni più dense corrispondono a regioni con maggiore temperatura. Inoltre queste sono caratterizzate dalla relazione tra fluttuazioni  $\delta_m$  della materia e  $\delta_{rad}$  della radiazione

$$\delta_{rad} = \frac{4}{3} \delta_m,$$

<sup>2</sup>La dimensione propria  $L$  è descritta nel paragrafo dedicato alla relazione tra scale angolari e dimensioni lineari di una perturbazione a pag. 21.

<sup>3</sup>Il dipolo cinematico fu osservato per la prima volta nel 1977 da G.F. Smoot e colleghi.

<sup>4</sup>I picchi acustici delle oscillazioni del plasma barioni - fotoni sono trattati nel paragrafo 3.2.1.

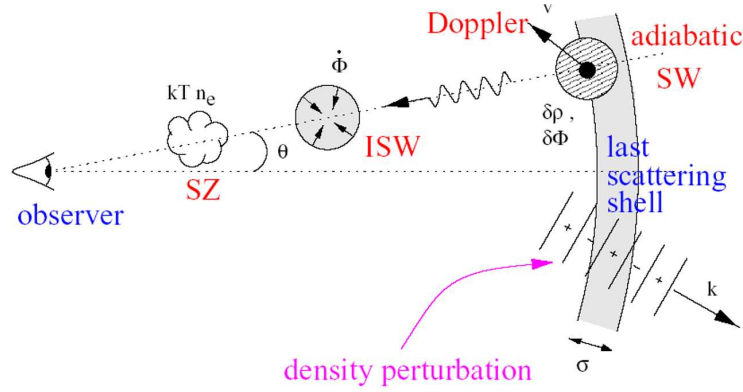


Figura 2.1: L'origine delle principali distorsioni del CMB.

mentre le fluttuazioni in temperatura sono descritte da:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{adiabatica} = \frac{1}{4} \delta_{rad} = \frac{1}{3} \delta_m.$$

In realtà il calcolo delle fluttuazioni adiabatiche è più complesso, perché alcune delle fluttuazioni di densità sono state ‘smorzate’ prima della ricombinazione a causa della diffusione dei fotoni, che trascinano con sé protoni ed elettroni.

Le fluttuazioni non esistono al di sotto della scala corrispondente alla massa di Silk di  $M_{Silk} \approx 10^{14} M_{\odot}$  che corrisponde a scale angolari  $\leq 5'$ , dello stesso ordine di grandezza che corrisponde allo spessore della superficie di ultimo scattering.

Bisogna però precisare che la superficie di ultimo scattering ha un certo spessore  $\Delta_{rec}$  (corrispondente al  $\Delta z \sim 80$ ) e che quindi da una certa direzione possiamo ricevere fotoni, che sono partiti a distanze tra loro diverse, che possono differire di  $\Delta_{rec}$ . Quindi se consideriamo perturbazioni di scala  $< \Delta_{rec}$ , possiamo ricevere fotoni corrispondenti a  $\frac{\Delta T}{T}$  provenienti da fluttuazioni tra loro scorrelate, che tendono a cancellarsi, almeno parzialmente, tra di loro. Se invece consideriamo una perturbazione di scala  $> \Delta_{rec}$ , tutti i fotoni che riceviamo da essa avranno una  $\frac{\Delta T}{T}$  correlata e non ci sarà cancellazione.

## 2.3 Crescita delle strutture nell'universo

Le equazioni che descrivono la dinamica dell'universo sono:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{equazione di continuità}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla (\Phi + p) \quad \text{equazione di Eulero}$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad \text{equazione di Poisson.}$$

Descriveremo l'evoluzione delle perturbazioni nella densità partendo dalle soluzioni delle equazioni omogenee e sviluppandole con la teoria perturbativa.

Le soluzioni delle equazioni omogenee sopra elencate sono:

$$\begin{aligned} \rho_0(t, \mathbf{r}) &= \frac{\rho_0}{a(t)^3} \\ \mathbf{v}_0(t, \mathbf{r}) &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \mathbf{r} \\ \Phi_0(t, \mathbf{r}) &= \frac{2\pi G \rho_0 \mathbf{r}^2}{3}. \end{aligned}$$

Dalla prima soluzione possiamo notare che la materia con l'espansione dell'universo viene diluita. La seconda relazione non è nient'altro che la legge di Hubble.

Passando alle coordinate comoventi  $\mathbf{x}$  che in questo caso definiamo come  $\mathbf{x} = \mathbf{r}/a(t)$  la densità  $\rho_0(t, \mathbf{r})$  diventa  $\rho_0(t, \mathbf{x})$  che dipende solamente dal tempo.

Vogliamo descrivere la perturbazione nella densità come una sovrapposizione di onde piane, quindi useremo le trasformate di Fourier. Scriviamo la densità, la velocità e il campo scalare con le perturbazioni al primo ordine:

$$\begin{aligned} \rho(t, \mathbf{x}) &= \rho_0(t) + \rho_1(t, \mathbf{x}) = \rho_0(t)[1 + \delta(t, \mathbf{x})] \\ \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{v}_0(t, \mathbf{x}) + \mathbf{v}_1(t, \mathbf{x}) \\ \Phi(t, \mathbf{x}) &= \Phi_0(t, \mathbf{x}) + \Phi_1(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

dove ovviamente  $\delta(t, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{v}_1(t, \mathbf{x})$ ,  $\Phi_1(t, \mathbf{x})$  sono in modulo molto minori di 1. Le trasformate delle tre quantità ci consentono di trovare l'equazione differenziale

$$\ddot{\delta}(t, \mathbf{k}) + 2\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \dot{\delta}(t, \mathbf{k}) + \left(\frac{k^2 v_s^2}{a^2(t)} - 4\pi G \rho_0\right) \delta(t, \mathbf{k}) = \mathbf{0}.$$

Abbiamo introdotto la velocità del suono  $v_s$  definita come

$$v_s^2 = c^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{adiabatico},$$

che è importante per la velocità di propagazione delle perturbazioni nel fluido. Per un fluido relativistico con l'equazione di stato  $p = (\rho c^2)/3$  la velocità del suono diventa

$$v_s = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

La velocità della propagazione del suono è legata alla densità di fotoni e barioni e fino alla ricombinazione è ben descritta da questa formula.

Definiamo la quantità

$$\kappa_J \equiv \left( \frac{k^2 v_s^2}{a^2(t)} - 4\pi G \rho_0 \right),$$

dalla quale dipende la crescita o meno delle fluttuazioni. Per  $\kappa_J = 0$  troviamo

$$\frac{k^2 v_s^2}{a^2(t)} = 4\pi G \rho_0.$$

Al vettore d'onda  $\mathbf{k}$  corrisponde una lunghezza d'onda comovente  $\lambda_{com} = 2\pi/|\mathbf{k}|$  e una lunghezza d'onda fisica  $\lambda_{fis} = 2\pi a(t)/|\mathbf{k}|$  che dipende dal fattore di scala. In questo caso è utile introdurre la *lunghezza di Jeans* riscrivendo l'ultima equazione come

$$\frac{k^2 v_s^2}{a^2(t)} = \frac{|\mathbf{k}|^2}{a(t)^2 4\pi^2} 4\pi^2 v_s^2 = \frac{4\pi^2 v_s^2}{\lambda_{fis}^2} = 4\pi G \rho_0 \quad (2.2)$$

e ricavando

$$\frac{v_s^2}{\lambda_{fis}^2} \pi = G \rho_0 \quad \text{e} \quad \lambda_J \equiv \lambda_{fis} = v_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}}.$$

Il tempo di collasso di una perturbazione è dato da

$$t_G \sim \frac{1}{\sqrt{G \rho_0}}$$

mentre il tempo sonoro  $t_s$ , cioè il tempo in cui una perturbazione di densità di dimensione  $\lambda$  viene cancellata dagli effetti della differenza di pressione, è

$$t_s \sim \frac{\lambda}{v_s}.$$

Se  $t_G < t_s$  la perturbazione collassa

$$\frac{1}{\sqrt{G \rho_0}} < \frac{\lambda}{v_s} \quad \implies \quad \lambda > v_s \frac{1}{\sqrt{G \rho_0}} \sim \lambda_J,$$

quindi il collasso della perturbazione avviene solo per scale maggiori della lunghezza di Jeans.

Se invece  $\lambda \leq \lambda_J$  il fluido di barioni e fotoni oscilla, perchè gli effetti di pressione impediscono il collasso.

Finché la scala corrispondente ad una perturbazione di data massa è maggiore del raggio di Hubble  $R_H$ , le sue diverse parti non sono in contatto causale tra loro. Sull'evoluzione della perturbazione influisce solo la densità locale, non quella globale. Col passare del tempo  $R_H$  cresce ( $H(t)$  decresce) e quando è uguale alla scala della perturbazione questa può finalmente evolvere

nella sua totalità e la pressione fa sentire i suoi effetti. Usando le relazioni 2.1 si vede che prima della ricombinazione il raggio di Hubble è dell'ordine della lunghezza di Jeans. Poiché però  $\lambda_J \sim R_H$ , gli effetti di pressione dominano sugli effetti gravitazionali e il plasma della perturbazione oscilla come un'onda sonora fino alla ricombinazione, quando  $\lambda_J$  diventa molto minori di  $R_H$ . Le oscillazioni del plasma barioni-fotoni sono importanti perché il fondo cosmico ne fornisce un' "istantanea" alla ricombinazione e vedremo meglio la loro importanza nel successivo capitolo, parlando dello spettro delle fluttuazioni del fondo cosmico.

## Capitolo 3

# L'analisi delle fluttuazioni e le osservazioni

In quest'ultimo capitolo introdurremo la teoria sullo spettro delle perturbazioni di densità e l'analisi delle fluttuazioni angolari. Analizzeremo brevemente anche il diverso comportamento dello spettro a scale angolari grandi e piccole, soffermandoci sui picchi acustici, che abbiamo precedentemente introdotto.

I dati del fondo cosmico nelle microonde raccolti dai vari strumenti, come visto nella parte precedente di teoria, sono di cruciale importanza per capire l'attuale struttura dell'universo. L'ultima parte sarà dedicata alle osservazioni, dove riporteremo la tabella dei parametri cosmologici, che le osservazioni del fondo cosmico stanno fissando con accuratezza sempre maggiore.



### 3.1 L'analisi delle fluttuazioni

In questa sezione parleremo dello spettro delle perturbazioni introducendo la funzione di trasferimento e successivamente tratteremo l'analisi delle fluttuazioni angolari.

#### 3.1.1 Lo spettro delle perturbazioni

Lo spettro delle fluttuazioni dipende dall'eccesso di densità  $\delta(\mathbf{x})$  che è definito come

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x}) - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle}$$

dove  $\rho$  è la densità di materia nell'universo. Si assume che il campo di densità  $\delta(\mathbf{x})$  (ad un tempo fissato) obbedisce alla statistica Gaussiana (statistica Gaussiana per campi casuali - Gaussian random field).

Finché l'evoluzione delle perturbazioni è lineare, si applica il principio di sovrapposizione e possiamo scrivere la distribuzione spaziale dell'eccesso di densità come una sovrapposizione di onde piane.

Sviluppando  $\delta(\mathbf{x})$  in serie di Fourier in un cubo di lato  $L$  (e di volume  $V = L^3$ ) e successivamente passando al continuo nell'approssimazione  $L \gg L_S$  (dove  $L_S$  è la scala massima a cui sono presenti strutture significative) si trova

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{V} \int_V \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x.$$

Lo scarto quadratico medio della fluttuazione può essere scritto come

$$\sigma^2 = \langle \delta(\mathbf{x})^2 \rangle$$

ovvero come

$$\sigma^2 = \frac{V}{(2\pi)^2} \int_V |\delta(\mathbf{k})|^2 d^3k.$$

Si assume che nel limite per  $V \rightarrow \infty$ , essendo l'universo omogeneo e isotropo, non ci sia dipendenza da  $\mathbf{k}$ , ma solo dal suo modulo. Si definisce quindi lo *spettro di potenza*

$$V|\delta(\mathbf{k})|^2 = \delta(|\mathbf{k}|) \equiv P(\mathbf{k}).$$

Nell'approssimazione in cui tutti i modi di Fourier  $\delta(\mathbf{k})$  non sono correlati

$$\langle \delta^*(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P(\mathbf{k})$$

dove la funzione  $P(\mathbf{k})$  è lo spettro di potenza delle fluttuazioni. Usualmente si assume che, almeno in un certo intervallo di  $k$ ,  $P(\mathbf{k})$  sia descritto da una legge di potenza

$$P(\mathbf{k}) \simeq k^n$$

dove  $n$  è chiamato indice spettrale e varia tra  $0.7 < n < 1.3$ . Per il valore  $n = 1$  le fluttuazioni sono "scale-invariant", cioè nello spettro le fluttuazioni

$\delta$  hanno la stessa ampiezza su tutte le scale di lunghezza. L'inflazione predice scale di questo tipo.

Lo spettro di potenza  $P(\mathbf{k})$  è collegato allo spettro di potenza primordiale  $P_i(\mathbf{k})$  tramite la funzione di trasferimento:

$$P(\mathbf{k}) = T^2(\mathbf{k}) P_i(\mathbf{k}).$$

Lo spettro primordiale rappresenta le fluttuazioni generate nell'universo primordiale, probabilmente generate all'inflazione. La funzione di trasferimento  $T(\mathbf{k})$  descrive l'evoluzione dello spettro di potenza primordiale.

### 3.1.2 Decomposizione in armoniche sferiche

Per lo studio delle fluttuazioni è utile proiettarle sulla sfera celeste al tempo dell'ultimo scattering. Ogni funzione  $f(\theta, \phi)$  o  $f(\hat{\mathbf{n}})$  su una sfera unitaria può essere sviluppata in armoniche sferiche  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  e così anche le fluttuazioni in temperatura  $\frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}})$ :

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

con i coefficienti

$$a_{lm} = \int_{4\pi} d\Omega \frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi).$$

La statistica delle fluttuazioni in temperatura è completamente determinata dai coefficienti  $a_{lm}$ .

Si noti che i termini  $l = 0$  ed  $l = 1$  non entrano usualmente nella sommatoria; il termine  $l = 0$  è semplicemente il valor medio delle fluttuazioni, mentre il termine di dipolo  $l = 1$  riguarda l'effetto Doppler cinematico e non viene considerato. Quest'ultimo termine verrà discusso successivamente.

I modi  $l$  sono legati alle scale angolari, in particolare

$$l \sim \frac{\pi}{\theta_{rad}} \quad \text{oppure} \quad l \sim \frac{60^\circ}{\theta}.$$

L'omogeneità dell'universo indica l'isotropia della radiazione di fondo cosmico, quindi la statistica è invariante per simmetria rotazionale. Per la statistica gaussiana i coefficienti sono indipendenti. Questo ci consente di descrivere la varianza dei coefficienti  $a_{lm}$  in funzione dei multipoli  $C_l$

$$C_l = a^2_l \equiv \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2 = \langle |a_{lm}|^2 \rangle.$$

I risultati osservativi vengono espressi in termini di varianza per intervallo logaritmico dello spettro angolare

$$\delta T^2_l = \frac{l(2l+1)C_l}{(4\pi)}.$$

### L'anisotropia di dipolo

La maggiore anisotropia osservata è quella di dipolo cinematico ( $l = 1$ ) dovuta all'effetto Doppler del quale abbiamo parlato nel paragrafo 2.2.2. L'ampiezza delle fluttuazioni di temperatura in questo caso è di

$$\frac{\Delta T}{T} = 1.23 \cdot 10^{-3}.$$

Come già spiegato, l'anisotropia in questo caso si ritiene essere causata dal moto del nostro sistema solare rispetto al fondo cosmico, il che è confermato dalle misure di velocità del gruppo locale di galassie. La temperatura misurata da un'osservatore in moto con velocità  $\beta = v/c$  rispetto al fondo cosmico di temperatura  $T_0$  è

$$T(\theta) = T_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos \theta} = T_0 \left(1 + \beta \cos \theta + \frac{\beta^2}{2} \cos 2\theta + O(\beta^3)\right).$$

Assumendo  $T_0 = T_\gamma$ <sup>1</sup>. le misure sono riassunte nella seguente tabella:

	velocità [km/s]	( $l, b$ )
baricentro del sistema solare	$371 \pm 0.5$	$(264.31^\circ \pm 0.17^\circ, 48.05^\circ \pm 0.10^\circ)$
Galassia e gruppo locale di galassie	$627 \pm 22$	$(276^\circ \pm 3^\circ, 30^\circ \pm 3^\circ)$

Tabella 3.1: Le velocità del sistema solare e della galassia.

Nella terza colonna della tabella sono riportate le coordinate di longitudine e latitudine galattica ( $l, b$ ) del punto verso il quale è orientato il vettore della velocità. La velocità del baricentro del sistema solare è calcolata con un livello di confidenza del 68% . La velocità della Galassia e del gruppo locale è calcolata dalla velocità del baricentro del sistema solare con conseguente aumento dell'incertezza.

L'effetto Doppler dovuto alla rotazione terrestre (per esperimenti su palloni) o al moto dei satelliti viene normalmente rimosso per studiare l'anisotropia dello spettro.

### 3.1.3 La funzione di correlazione angolare

La funzione di correlazione angolare è

$$C(\theta) = \left\langle \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) \frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}') \right\rangle$$

<sup>1</sup> $T_\gamma$  indica il valore misurato dello spettro del fondo cosmico (tabella a pag. 44)

dove il  $\cos(\theta) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}'$ . La funzione di correlazione può anche essere scritta con i polinomi di Legendre:

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos(\theta)).$$

Il set di coefficienti  $C_l$  per tutti gli  $l$  caratterizza completamente lo spettro. L'unico modo di calcolare i coefficienti per tutte le scale è di integrare l'equazione di trasporto numericamente. Il risultato dipende dallo spettro primordiale, dalla natura della materia oscura, dalla frazione di materia barionica, dalla costante di Hubble e altri parametri. Avendo misurato e calcolato molti  $C_l$  c'è sufficiente ridondanza nel determinare i parametri cosmologici con migliore accuratezza.

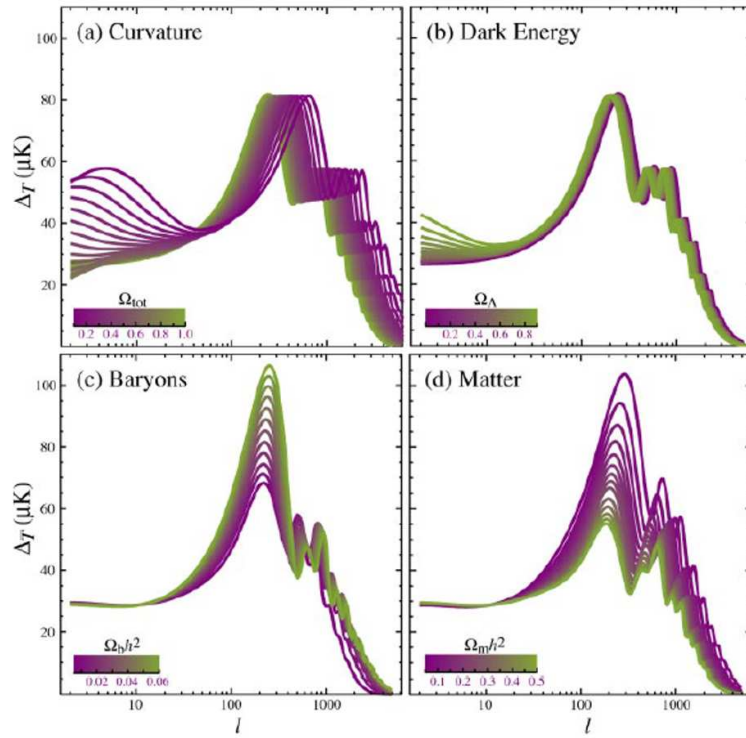


Figura 3.1: Lo spettro di potenza dipende dai parametri cosmologici: (a) curvatura, (b) energia oscura, (c) materia barionica, (d) materia.

## 3.2 Lo spettro di potenza

Lo spettro di potenza che abbiamo introdotto rivela due comportamenti molto diversi, che dipendono dalle scale angolari alle quali guardiamo.

Scale angolari piccole, cioè minori di  $1^\circ$ , mostrano la presenza dei picchi acustici, dei quali abbiamo parlato nel precedente capitolo, mentre a scale angolari più grandi lo spettro risulta piatto.

### 3.2.1 Lo spettro di potenza a scale angolari piccole

Origine dei picchi acustici sono le oscillazioni del plasma di barioni e fotoni che sono presenti sulla superficie di ultimo scattering.

#### Il primo picco acustico

La scala angolare del primo picco dipende in particolar modo dalla combinazione dei parametri di densità di materia  $\Omega_m$  e di costante cosmologica  $\Omega_\Lambda$ . La stima numerica della posizione del primo picco è

$$l \simeq 220 \left( \frac{1 - \Omega_\Lambda}{\Omega_m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La posizione del picco acustico è di circa  $l \simeq 220$  se  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ , mentre si sposta verso  $l$  più alti nel caso in cui  $\Omega_\Lambda = 0$ . Misurando le armoniche  $C_l$  a scale angolari piccole la posizione del primo picco favorisce un universo quasi piatto e con il termine di costante cosmologica  $\Lambda$  non nullo [13].

Le misure del primo picco sono state effettuate nel 2000 dagli esperimenti Maxima e Boomerang. Il primo picco coincide con le predizioni sulle onde sonore delle perturbazioni. Molti modelli cosmologici furono eliminati da questi esperimenti, avvalorando il modello standard. Dai dati sul primo picco l'universo si mostra spazialmente piatto.

#### Calcolo della posizione del primo picco acustico

Come abbiamo visto nella sezione 2.3 una volta che la scala della perturbazione è dell'ordine di  $R_H$ , il plasma di fotoni e barioni inizia ad oscillare.

La parte temporale della fase  $\varphi$  dell'oscillazione è descritta da

$$d\varphi = \omega dt = 2\pi\nu dt = \frac{2\pi}{\lambda_{fis}} v_s dt = \frac{2\pi}{\lambda_{com}} \frac{v_s}{a(t)} dt = k \frac{v_s}{a(t)} dt, \quad (3.1)$$

dove  $\lambda_{fis}$ ,  $\lambda_{com}$  e  $v_s$  sono stati definiti nella sezione 2.3.

Integrando la (3.1) tra il tempo di entrata della perturbazione  $t_{entrata}$  entro  $R_H$  e il tempo all'ultimo scattering (last scattering)  $t_{ls}$  troviamo

$$\varphi = \int_{t_{entrata}}^{t_{ls}} \frac{k v_s dt}{a(t)} = \frac{k}{a_{ls}} \int_{t_{entrata}}^{t_{ls}} \frac{v_s dt}{a(t)} = \frac{k}{a_{ls}} d_S(t_{ls}).$$

In questo modo abbiamo introdotto l'orizzonte sonoro  $d_S$  al tempo di ultimo scattering

$$d_S(t_{ls}) = a_{ls} \int_{t_{entrata}}^{t_{ls}} \frac{v_s dt}{a(t)}.$$

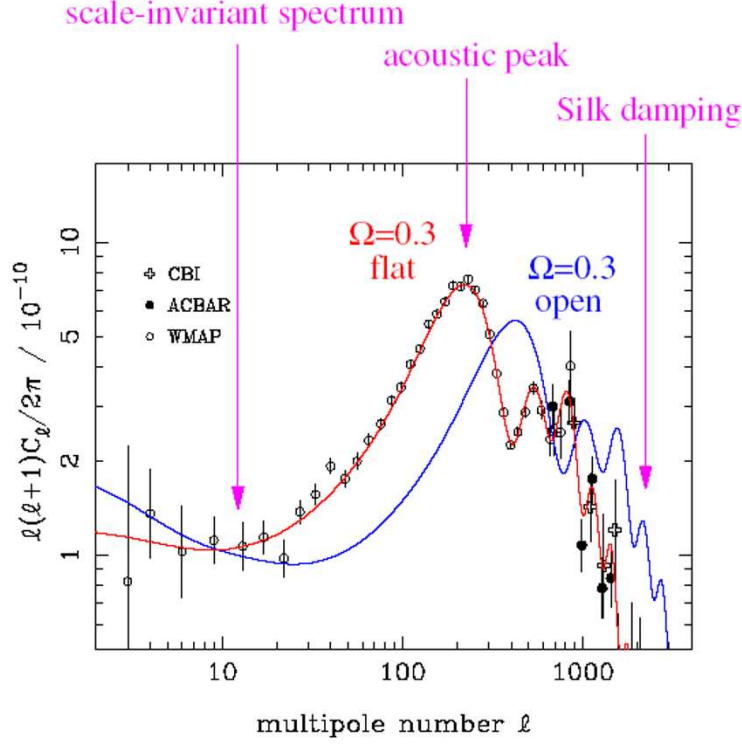


Figura 3.2: Nel grafico sono evidenziate le parti principali dello spettro di potenza: lo spettro ‘scale-invariant’, i picchi acustici, la parte dello spettro che viene smorzata. Le due linee continue mostrano gli spettri per geometrie aperta (blu) o piatta (rosso) con il parametro di densità della materia  $\Omega_M = 0.3$ .

I picchi di massima compressione o massima espansione avvengono per le fasi  $\varphi_m = m\pi$  con  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Il primo picco corrisponde a  $m = 1$  e  $\varphi_m = \pi$ , quindi

$$\pi = \frac{k}{a_{ls}} d_S(t_{ls}) = \frac{2\pi}{\lambda_{fis}(t_{ls})} d_S(t_{ls}) \quad \text{e} \quad d_S(t_{ls}) = \frac{\lambda_{fis}(t_{ls})}{2}.$$

Usando la relazione tra la velocità della luce  $c$  e la velocità del suono  $v_s$  si vede che ( $t_{entrata} \ll t_{ls}$  e si pone  $t_{entrata} \sim 0$ )

$$d_S(t_{ls}) = \frac{1}{\sqrt{3}} a_{ls} \int_{t_{entrata}}^{t_{ls}} \frac{c dt}{a(t)} = \frac{1}{\sqrt{3}} d_H(t_{ls}) \sim \frac{2}{\sqrt{3}} R_H(t_{ls}).$$

La scala della perturbazione è  $\lambda_{fis}(t_{ls})/2$ , quindi l’angolo corrispondente è

$$\theta_s = \frac{\lambda_{fis}(t_{ls})/2}{d_A(t_{ls})} = \frac{d_S(t_{ls})}{d_A(t_{ls})},$$

dove  $d_A$  è la distanza del diametro angolare (definita nella sezione 2.1), che risulta essere (dalle relazioni a pagina 21)

$$d_A(z) \simeq \frac{2c}{H_0 \Omega_M^\alpha (1+z)}.$$

Il parametro di densità è elevato alla  $\alpha$ , che dipende dalla presenza o meno di costante cosmologica ( $\alpha = 1$  per  $\Omega_M \neq 1$  e  $\Omega_\Lambda = 0$  o  $\alpha = 0.4$  per  $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$ ).

A  $\theta_s$  corrisponde un multipolo  $l_A$

$$l_A \simeq \frac{\pi}{\theta_s} \simeq \frac{\pi d_A(t_{ls})}{d_S(t_{ls})} \simeq \frac{\pi}{d_S(t_{ls})} \frac{2c}{H_0 \Omega_M^\alpha (1+z)},$$

mentre la posizione degli altri picchi sarà un multiplo intero del multipolo  $l_A$ . Dalla relazione tra la  $d_s$  e la  $d_H$  e dall'orizzonte delle particelle che abbiamo precedentemente calcolato ed è

$$d_H \simeq 0.165 (\Omega_M h^2)^{-1/2} Mpc$$

quindi

$$l_A \simeq \frac{\pi \sqrt{3}}{d_H(t_{ls})} \frac{2c}{H_0 \Omega_m^\alpha (1+z)}$$

risulta essere circa

$$l_A \sim \frac{200}{\Omega_M^{1/2-\alpha}},$$

che è proprio la posizione del primo picco acustico. Si noti che non c'è dipendenza dal valore del parametro di Hubble  $H_0$ .

### Il secondo picco acustico

Nel maggio del 2001 gli esperimenti Maxima, Boomerang e DAS1 riportarono la misura del secondo picco. Su questo picco influisce maggiormente la densità dei barioni.

I picchi acustici dispari (primo, terzo...) sono associati al plasma che 'cade' nelle buche di potenziale gravitazionale ovvero di quanto si comprime il plasma. Quindi questi picchi sono maggiori se c'è maggior presenza di barioni nell'universo.

La presenza di barioni aumenta il primo picco rispetto al secondo. Nel caso siano presenti più barioni, decresce la frequenza delle oscillazioni del plasma e i picchi vengono spostati a poli  $l$  più grandi.

Dalle misure si vede che il secondo picco ha ampiezza minore del primo. Le misure indicano che il parametro di densità barionica ha valore 0.044. Questo valore è interessante, perché indica che molta della materia barionica non è presente nelle stelle.

### I picchi Doppler

Le oscillazioni di densità implicano un moto della componente barionica del plasma che quindi induce, sui fotoni diffusi, uno spostamento di frequenza per effetto Doppler. Poiché i massimi di densità e di velocità sono sfasati di  $\pi/2$ , l'effetto Doppler produce dei picchi che vanno a disporsi nei minimi dello spettro, tra i picchi acustici. L'effetto di questi ultimi è però dominante e quindi i possibili picchi Doppler non appaiono, se non come un riempimento dello spettro tra un picco acustico e l'altro.

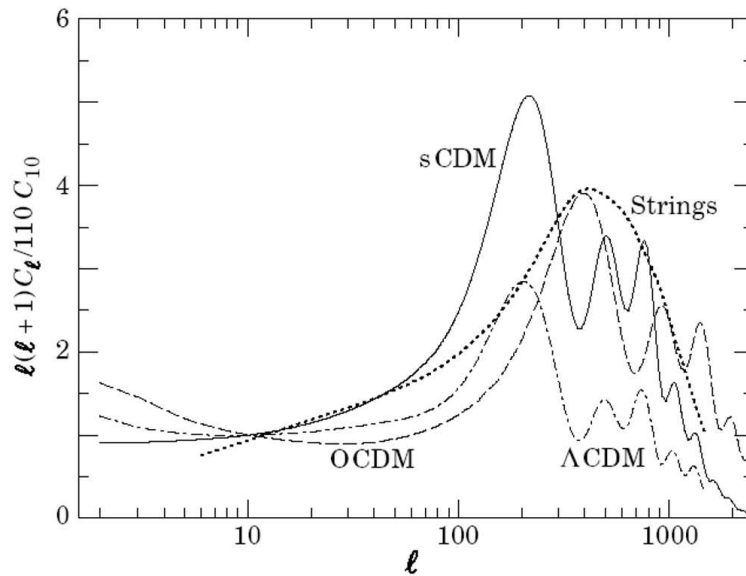


Figura 3.3: Nel grafico sono evidenziati spettri di potenza diversi a seconda dei modelli di universo (CDM - materia oscura fredda,  $\Lambda$  - costante cosmologica, Strings - stringhe e difetti topologici).

### 3.2.2 Lo spettro di potenza a scale angolari grandi

Lo spettro di potenza a grandi scale angolari è stato misurato da COBE. A grandi scale angolari lo spettro risulta piatto e l'effetto determinante è l'effetto di Sachs-Wolfe. Tuttavia le ultime osservazioni del satellite WMAP indicano a scale molto grandi una perdita di potenza.

**Lo spettro di potenza a grandi scale angolari** Recentemente è stato pubblicato sulla rivista Nature un articolo sulla forma dell'Universo che risulterebbe dai dati di WMAP [11]. Secondo Luminet e altri <sup>2</sup> i dati di

<sup>2</sup>Luminet, J.-P., Weeks, J.R., Riazuelo, A., Lehoucq, R., Uzan, J.-P., Nature 425, 593-595 (2003)



WMAP evidenziano che l'universo è finito e una sua probabile forma sarebbe il dodecaedro di Poincaré.

L'universo è caratterizzato dalla curvatura, che dipende dalla densità di materia nell'universo (espressa tramite il parametro normalizzato di densità  $\Omega_0$ ). La curvatura determina la geometria dello spazio (vedi figura 3.4). Un'altra caratteristica dell'universo è che può essere chiuso (limitato) o aperto (infinito).

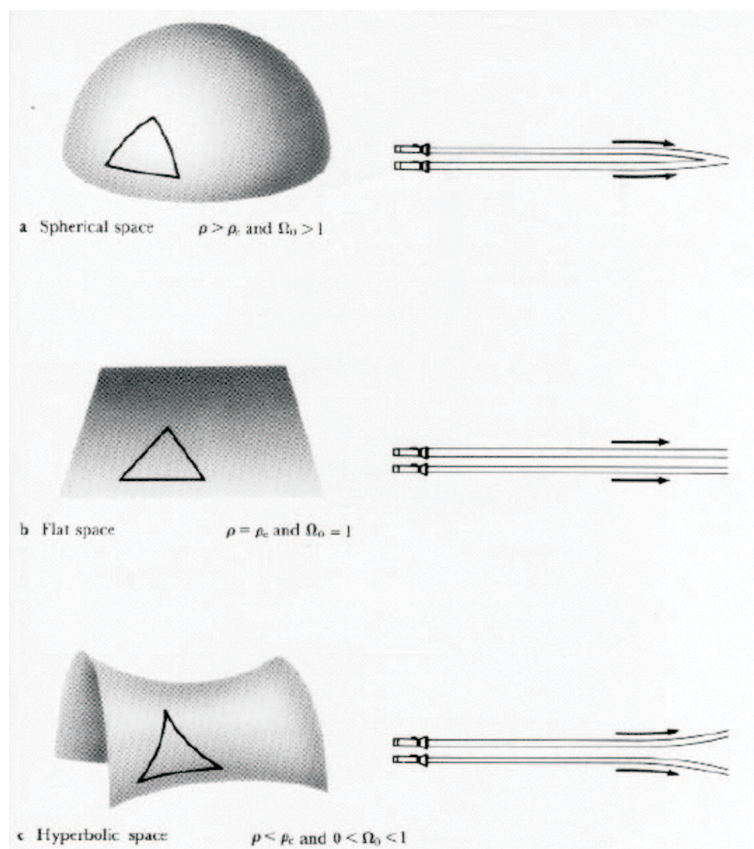


Figura 3.4: Le possibili geometrie dello spazio sono legate alla quantità di materia presente nell'universo. La materia 'incurva' lo spazio-tempo, determinandone la geometria.

Dai dati risulta che  $\Omega_0 = 1.02 \pm 0.02$  e quindi l'universo risulterebbe (quasi) piatto (Euclideo). Dallo spettro delle anisotropie però risulta anche un'altro fatto: a scale angolari sopra i  $60^\circ$  c'è una perdita di potenza, che non può essere chiarita dai modelli cosmologici. A scale angolari maggiori secondo i modelli lo spettro dovrebbe essere piatto (il cosiddetto "plateau di Sachs-Wolfe" dovuto all'effetto Sachs-Wolfe descritto a pag. 24), mentre nel grafico 3.5 le misure di WMAP indicano una perdita di potenza. In particolare la perdita di potenza è rilevante nell'anisotropia di quadrupolo.

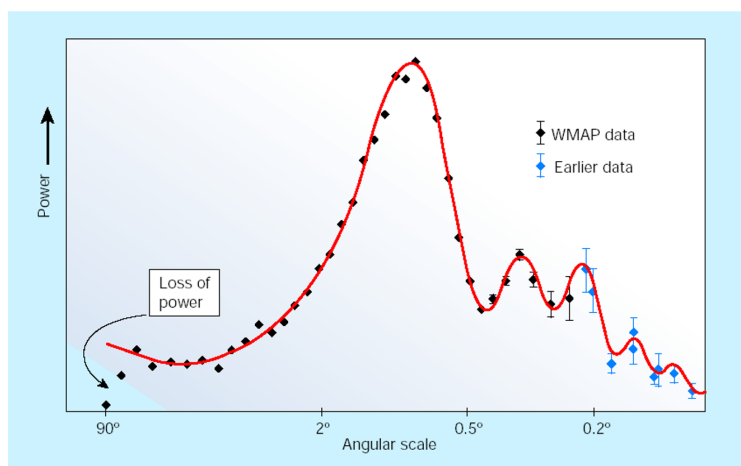


Figura 3.5: Lo spettro delle fluttuazioni.

La perdita di potenza è evidenziata nella parte dello spettro a grandi scale angolari.

Secondo alcuni <sup>3</sup> la spiegazione sarebbe che nell'universo primordiale valevano leggi fisiche, che non sono ancora state scoperte. Secondo Luminet e collaboratori il nostro universo ha delle sezioni con curvatura positiva e topologia non standard. Un diametro piccolo dell'universo (e quindi un universo finito) implica l'esistenza di una lunghezza massima, che nello spettro del fondo cosmico si concretizza in una perdita di potenza a scale maggiori di questa lunghezza.

La proposta del gruppo di Luminet è che l'universo sia formato da sezioni spaziali dodecaedriche di uno spazio di curvatura positiva, composte assieme a formare uno spazio tridimensionale finito. Il parametro di densità per questo modello è  $\Omega_0 = 1.013$ .

Se l'universo è 'piccolo' secondo Cornish e collaboratori dovrebbero essere presenti nello spettro del fondo cosmico dei cerchi di uguali fluttuazioni in temperatura. Queste strutture potranno essere osservate con Planck che avrà un'accuratezza migliore di WMAP.

Nel caso l'ipotesi di Luminet sia corretta anche la teoria dell'inflazione caotica <sup>4</sup> potrebbe essere accantonata.

In ogni caso la perdita della potenza nello spettro a grandi scale angolari è compatibile con un'universo 'piccolo' e finito.

<sup>3</sup>S. Tsujikawa, R. Maartens, R.H. Brandenberger, preprint: <<http://arXiv.org/astro-ph/0308169>>, 2003.

<sup>4</sup>L'inflazione caotica, a differenza dell'inflazione esponenziale, predice la crescita di molte strutture (bolle) in espansione. Ogni bolla in espansione corrisponde ad un universo.

### 3.3 Le osservazioni

Le osservazioni delle anisotropie nel CMB sono state fatte da tre tipi di strumentazioni:

- palloni ad alta quota
- interferometri
- strumentazione ground-based.

Lo spettro del fondo cosmico ha un picco nelle microonde ed è di difficile osservazione da terra, a causa dell'assorbimento atmosferico. Ecco perché si usa prevalentemente palloni ad alta quota (come nell'esperimento Boomerang) o satelliti (COBE, WMAP, ecc.). Bisogna anche precisare che l'osservazione del fondo cosmico è difficoltosa nella parte di cielo coperta dal disco galattico. Il disco della nostra galassia contiene polveri, che emettono nel radio e nel millimetrico, provocando un notevole rumore. A questo proposito vengono effettuate mappe del cielo in diverse bande (K, Ka, Q, V, W) che permettono di processare i dati in modo da minimizzare il rumore dovuto all'emissione del disco galattico.

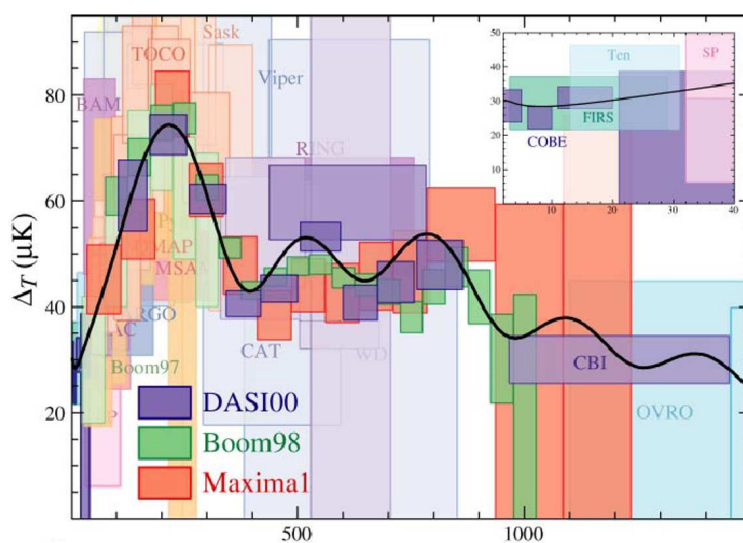


Figura 3.6: Grafico del range delle misure effettuate da diversi esperimenti.

Il primo strumento che ha mostrato risultati significativi è stato il satellite COBE (COsmic Background Explorer) della NASA, che fu lanciato nel novembre del 1989 con a bordo tre strumenti: DIRBE per la ricerca del fondo cosmico nell'infrarosso (CIB - Cosmic Infrared Background), DMR per la mappatura dell'anisotropia nello spettro e lo spettrofotometro FIRAS.

Tra gli esperimenti che abbiamo più volte citato c'è il satellite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) della NASA. Proposto nel 1995 il satellite è stato lanciato nel giugno del 2001 e i primi 'data release' si sono avuti nel febbraio di quest'anno.<sup>5</sup> WMAP è la prima missione che viene posta in orbita nel punto L2 (punto lagrangiano 2).<sup>6</sup> L'orbita (essendo instabile) ha bisogno di un riaggiustamento ogni 3 mesi. La missione durerà 4 anni. Nel 2007 subentrerà a WMAP il satellite Planck surveyor dell'ESA.

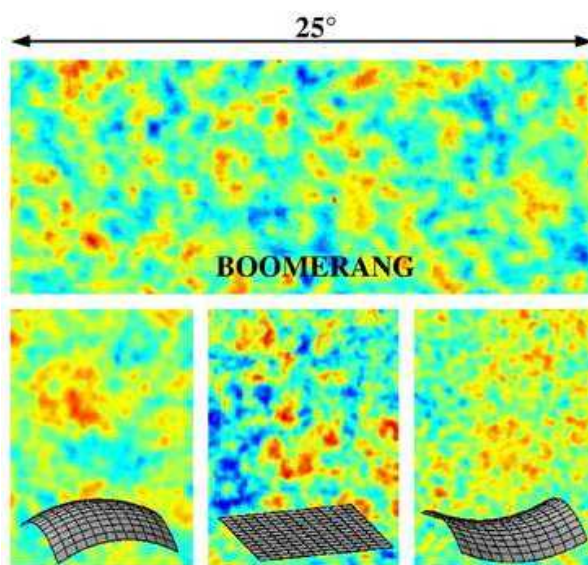


Figura 3.7: L'esperimento Boomerang

Le fluttuazioni in temperatura dell'esperimento Boomerang (foto in alto) possono essere comparate con tre tipi di fluttuazioni in temperatura che corrispondono ai tre tipi di curvatura dell'universo. Si può notare quanto i dati di Boomerang indichino un universo con geometria piatta.

<sup>5</sup>I dati di WMAP sono archiviati e distribuiti dal Legacy Archive for Microwave Background Data Analysis (LAMBDA) della NASA.

<sup>6</sup>L2 è una regione di gravità ed è semistabile, circa 4 volte più lontano della Luna e segue il moto della Terra intorno al Sole.

### 3.3.1 I parametri cosmologici - ultimi dati

Per finire abbiamo raccolto in una tabella i principali parametri cosmologici, che sono stati determinati in base ai dati forniti dalle varie osservazioni del fondo cosmico.

Descrizione	Simbolo	Valore	Incertezza
Densità Totale	$\Omega_{tot}$	1.02	0.02
Costante cosmologica (energia oscura)	$\Omega_{\Lambda}$	0.73	0.04
Densità barionica	$\Omega_b$	0.044	0.004
Densità di materia	$\Omega_m$	0.27	0.04
Densità di neutrini leggeri	$\Omega_{\nu}h^2$	$< 0.0076$	95% CL
Temperatura del fondo cosmico (K)	$T_{cmb}$	2.725	0.002
Densità dei fotoni del fondo cosmico ( $cm^{-3}$ )	$n_{\gamma}$	410.4	0.9
Redshift al decoupling	$z_{dec}$	1089	1
Larghezza del decoupling	$\Delta z_{dec}$	195	2
Costante di Hubble	$h$	0.71	0.04
Età dell'universo (Gyr)	$t_0$	13.7	0.2
Età al disaccoppiamento (kyr)	$t_{dec}$	379	8
Età alla reionizzazione (Myr)	$t_r$	180	+220/ - 80
Profondità ottica alla reionizzazione	$\tau$	0.17	0.04
Redshift della reionizzazione	$z_r$	20	10
Parametro di Sunyaev-Zel'dovich	$y$	$ y  < 1.2 \cdot 10^{-5}$	95% CL
Potenziale chimico adimensionale	$\mu_0$	$ \mu_0  < 9 \cdot 10^{-5}$	95% CL

Tabella 3.2: Nella tabella sono rappresentati i parametri cosmologici calcolati dai dati di WMAP e COBE. Tabella tratta da [9] e [6].

# Conclusion

In conclusione, lo spettro del fondo cosmico, che si è formato nell'universo primordiale, riesce a trasmetterci moltissime informazioni.

La prima informazione riguarda i processi presenti nell'universo primordiale. La formazione dello spettro di corpo nero avviene tramite processi di scattering (Bremsstrahlung, doppio scattering Compton e scattering Compton) tra materia e radiazione. Sono comunque possibili distorsioni a epoche dopo  $z_{BE} \sim 3 \cdot 10^6$ : distorsioni di Bose-Einstein, Compton e Bremsstrahlung. Prima di quest'epoca lo spettro si è formato grazie alle condizioni di quasi equilibrio termodinamico presenti nell'universo.

La seconda informazione viene fornita dalle distorsioni primordiali. Gli effetti ai quali sono sottoposti i fotoni del fondo cosmico (effetto Sachs-Wolfe, effetto Doppler e picchi acustici) sono ben mappati nello spettro delle fluttuazioni. Analizzando la crescita delle strutture nell'universo possiamo capire la formazione dei picchi acustici nello spettro delle fluttuazioni a scale angolari minori di un grado. L'ampiezza dei picchi, la differenza tra di loro, la loro posizione, la forma dello spettro determinano i più importanti parametri cosmologici, tra i quali il parametro di Hubble, la presenza di materia barionica, materia oscura ed energia oscura.

Lo spettro del fondo cosmico nelle microonde è importante, perché fornisce informazioni sull'evoluzione passata e futura dell'universo in cui viviamo. Ecco perché, come ha detto il celebre fisico Stephen Hawking, la scoperta del fondo cosmico nelle microonde è stata la "scoperta del secolo, se non di tutti i tempi".

# Bibliografia

- [1] L. Bergstrom, A. Goobar, *Cosmology and particle astrophysics*, Chichester, Wiley & Sons, 1999, pag. 73-107, 184-193
- [2] M. Lachieze-Rey, E. Gunzig, *The Cosmological background radiation*, Cambridge, Cambridge University Press, 1999, pag. 181-198
- [3] R.A.Alpher, H.Bethe, G.Gamow, *The Origin of Chemical Elements*, Physical Review (1948), vol. 73, n. 7
- [4] A.A. Penzias, R.W. Wilson, *A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s*, Astrophysical Journal (1965), vol. 142, pag. 419-421
- [5] R.H. Dicke, P.J.E. Peebles, P.G. Roll, D.T. Wilkinson, *Cosmic Blackbody radiation*, Astrophysical Journal, (1965), vol. 142, pag. 414-419
- [6] G.F. Smoot, D. Scott, *Cosmic Background Radiation*, 2001, <<http://pdg.lbl.gov/pdg.html>>
- [7] E. Gawiser, J. Silk, *The cosmic microwave background radiation*, Physics Reports 333-334 (2000), pag. 245-267
- [8] M. Berry, *Principles of cosmology and gravitation*, Philadelphia, Institute of physics Publishing, 1989, pag. 140-145
- [9] C.L.Bennet et al., *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results*, preprint: <<http://arXiv.org/astro-ph/0302207>>, 2003
- [10] R.W. Wilson, *The cosmic microwave background radiation*, Nobel Lecture, 8 December, 1978, <<http://www.nobel.se/physics/laureates/1978/wilson-lecture.pdf>>
- [11] G.F.R.Ellis, *The shape of the Universe*, Nature, vol. 425, 2003
- [12] M. White, W. Hu, *The Sachs-Wolfe effect*, Astronomy and Astrophysics (1997), vol. 321, n.8-9

- [13] M. Fugukita, C.J.Hogan, *Global cosmological parameters:  $H_0$ ,  $\Omega_M$  and  $\Lambda$* , 2000, <<http://pdg.lbl.gov/pdg.html>>
- [14] Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, <<http://map.gsfc.nasa.gov/>>
- [15] W. Hu, *The Physics of Microwave Background Anisotropies, Ringing in the New Cosmology*, <<http://background.uchicago.edu/whu/intermediate/intermediate.html>>